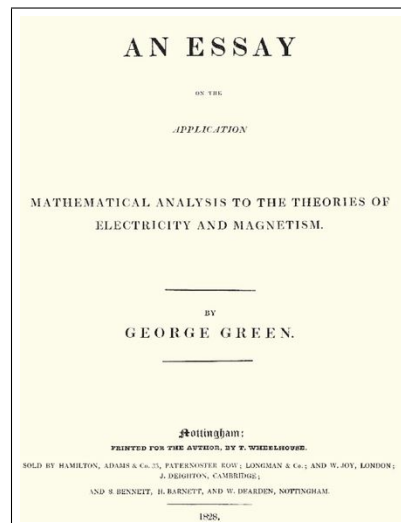

Teorema de Green

6.1 Introducción

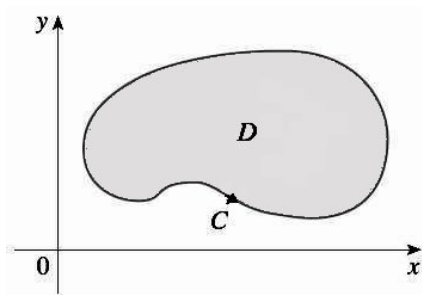
En esta sesión se revisa el primero de los 3 teorema claves del cálculo vectorial: el Teorema de Green. Este teorema establece que una integral doble sobre una región D del plano es igual a una integral de línea a lo largo de la curva cerrada C que constituye la frontera de D .*



* Matemático Inglés, 1793-1841.

En su biografía ubicada en http://es.wikipedia.org/wiki/George_Green, se destaca que “El joven George Green solo asistió de forma regular a la escuela durante un año entre los 8 y 9 años ayudando a su padre posteriormente...”

6.2 Teorema de Green



Sean

- $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\hat{i} + Q(x, y)\hat{j} = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial en \mathbb{R}^2 , C^1 en un dominio R del plano*.
- C una curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de una región D , contenida en R .

entonces

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (6.1)$$

Nota 6.1. Formalmente, poniendo $d\vec{r} = (dx, dy)$, se tiene que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$$

Luego, el teorema de Green también puede presentarse de la siguiente manera

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (6.2)$$

Demostración: Notar que el teorema de Green (6.2) quedará demostrado si se verifica que:

$$\int_C Pdx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (6.3)$$

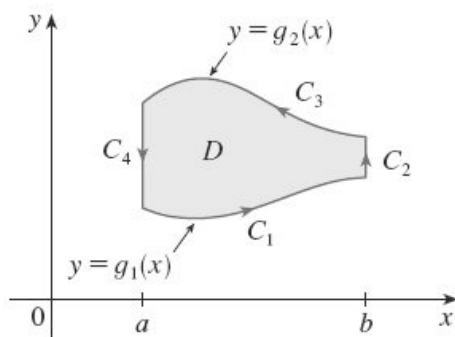
y

$$\int_C Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \quad (6.4)$$

* Recordar que un campo escalar es C^1 en un dominio, cuando él y sus derivadas parciales son continuas en dicho dominio.

Se comprobará (6.3) para el caso en que D sea una región del tipo I (verticalmente simple):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



Dominio verticalmente simple (tipo I)

en donde g_1 y g_2 son funciones continuas. Esto nos permite calcular la integral doble del miembro derecho de la ecuación (6.3), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\ &= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b P(x, g_2(x)) dx - \int_a^b P(x, g_1(x)) dx \\ &= - \int_C P dx \end{aligned}$$

Por otra parte, ahora se calcula el lado izquierdo de la ecuación (6.3), expresando C como la unión de las cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4 . Sobre C_1 , se toma a x como el parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas como $x = x, y = g_1(x), a \leq x \leq b$. Luego

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Las ecuaciones paramétricas de $-C_3$ son: $x = x, y = g_2(x), a \leq x \leq b$. Luego

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Sobre C_2 o C_4 , x es constante, por lo que $dx = 0$. Así

$$\int_{C_2} P(x, y)dx = \int_{C_4} P(x, y)dx = 0$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y)dx &= \int_{C_1} P(x, y)dx + \int_{C_2} P(x, y)dx + \int_{C_3} P(x, y)dx + \int_{C_4} P(x, y)dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_C P(x, y)dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \quad (6.5)$$

de igual forma se puede probar (6.4), es decir:

$$\int_C Q(x, y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \quad (6.6)$$

Sumando (6.5) y (6.6), se tiene que:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Por lo tanto, se tiene lo pedido.

Nota: Sobre el teorema de Green, en general, se realizan 3 tipos de actividades, a saber:

- **Actividad tipo 1: Calcular una integral de línea.**

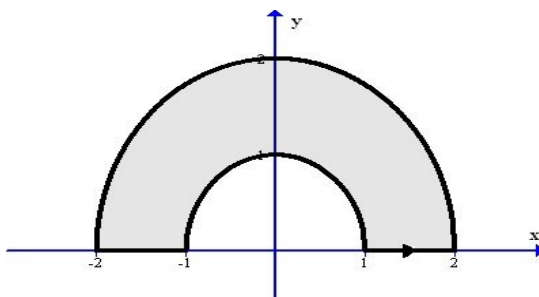
Usando el teorema de Green, calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

En este caso, se debe en (6.2), calcular el lado (2), y el valor obtenido será, luego de este teorema, el valor de la integral de línea pedido.

Ejemplo 6.1. Usando el teorema de Green, calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \arctan \frac{y}{x} \hat{i} + \ln(x^2 + y^2) \hat{j}$$

y C es la siguiente curva, orientada en sentido positivo



Solución: Sea Como $P = \arctan \frac{y}{x}$ y $Q = \ln(x^2 + y^2)$, se tiene que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Luego

$$\begin{aligned} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dA \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 \frac{r \cos \theta}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_1^2 \cos \theta dr d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 6.1. Usar el teorema de Green para comprobar que

$$\oint_C x^2 y dx + x^2 y^3 dy = -\frac{1}{12}$$

donde C es el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

- **Actividad tipo 2: Calcular una integral doble**

Usando el teorema de Green, calcular $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$.

En este caso, se debe en (6.2), calcular el lado (1), y el valor obtenido será, luego de este teorema, el valor de la integral doble pedido.

Ejemplo 6.2. Usando el teorema de Green, calcular

$$\iint_R (x - y) dA$$

donde R es la círculo de radio 2 y centrada en el origen

Solución: Aquí se debe buscar un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q)$, de modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x - y.$$

Un campo vectorial que satisface esta condición es:

$$\vec{F} = \left(\frac{y^2}{2}, \frac{x^2}{2} \right)$$

La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centrada en el origen es

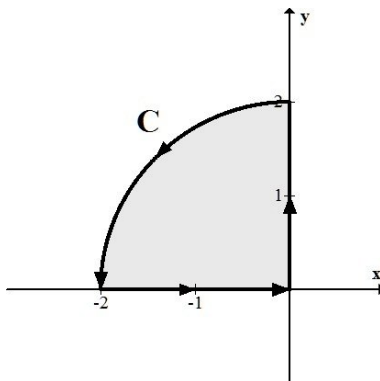
$$r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \iint_R (x - y) dA &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 t, 2 \cos^2 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \cdot \sin^3 t + 4 \cdot \cos^3 t) dt \\ &= 4 \cdot \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^3 t) dt \\ &= 4 \cdot \int_0^{2\pi} -\sin^2 t \cdot \sin t + 4 \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot \cos t dt \\ &= 4 \cdot \int_0^{2\pi} -(1 - \cos^2 t) \cdot \sin t + 4 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cdot \cos t dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

• **Actividad tipo 3: Verificar el teorema de Green.**

En este caso, se debe en (6.2), calcular el lado (1) y el lado (2), y verificar que ambos valores son iguales.

Ejemplo 6.3. Comprobar el teorema de Green para la curva C :



y el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = -2x^2y\hat{i} + 2xy^2\hat{j}$.

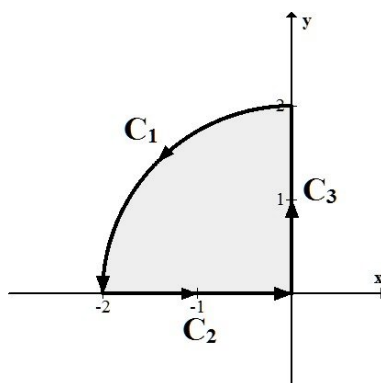
Solución: Calculemos en primer lugar, $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

La curva C , se debe descomponer en 3 curvas

$$C_1 : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad \text{con } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{con } -2 \leq t \leq 0$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2$$



Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi, \quad \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Por lo tanto:

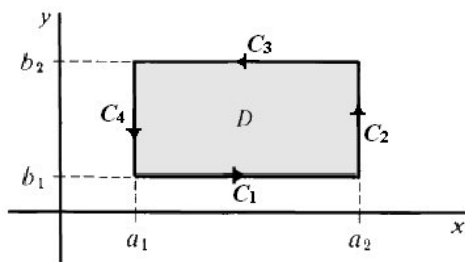
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi \quad (6.7)$$

Por otra parte,

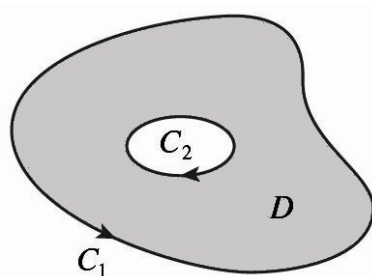
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (2y^2 + 2x^2) dx dy \stackrel{\text{coord. polares}}{=} 4\pi \quad (6.8)$$

Comparando (6.7) y (6.8), se verifica el Teorema de Green.

Ejercicio 6.2. Comprobar el teorema de Green para el caso particular en que D es un rectángulo:



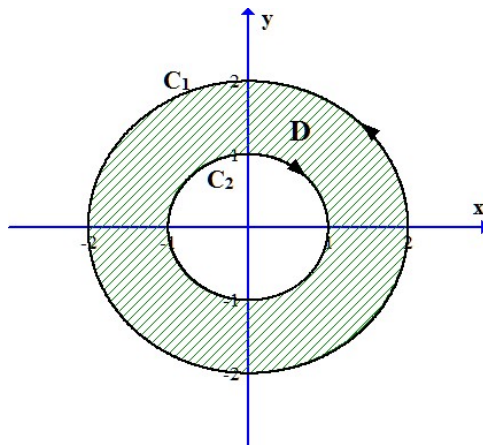
Nota 6.2. El teorema de Green también es válido para regiones como la siguiente:



Aquí la curva $C = C_1 + C_2$, y se tiene que

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_2} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Ejercicio 6.3. Evaluar $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$, donde C es la frontera de la región anular D de la parte del plano que está entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ (curva C_2 , con orientación negativa) y $x^2 + y^2 = 4$ (curva C_1 , con orientación positiva).



Solución:

Por el teorema de Green

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\
&= \iint_D y dA = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_1^2 r^2 dr \\
&= [-\cos \theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

6.3 Teorema de Green y áreas

Verificar que el área de una región D del plano, viene dada por:

$$\text{Area de}(D) = - \oint_C y dx, \quad \text{Area de}(D) = \oint_C x dy, \quad \text{Area de}(D) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

Ejercicio 6.4. Determinar el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Solución: La elipse tiene ecuaciones paramétricas $x = a \cos t$ y $y = b \sin t$, en donde $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t) \cdot (b \cos t) - (b \sin t) \cdot (-a \sin t) dt \\
&= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

6.4 Actividades

- 1) Verificar el teorema de Green con el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (3x + 2y, x - y)$ y la curva C dada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, para $t \in [0, 2\pi]$
- 2) Usar el teorema de Green para calcular las integrales del campo vectorial $\vec{F}(x, y)$ a lo largo de la curva dada:

- a) $\vec{F}(x, y) = (5x^3 + 4y)\hat{i} + (2x - 4y^4)\hat{j}$, a lo largo del círculo $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido antihorario.
- b) $\vec{F}(x, y) = (\alpha(x) - y)\hat{i} + (x + \beta(y))\hat{j}$, donde α y β son funciones reales con primera derivada continua definidas en \mathbb{R} , a lo largo de un cuadrado de lado a recorrido positivamente.
- c) $\vec{F}(x, y) = (x^3 - y^3)\hat{i} + (x^3 + y^3)\hat{j}$, donde C es la frontera de la región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.
- 3) Evaluar $\oint_C xy dx + x^2 y^3 dy$, donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 2)$:

- a) directamente
- b) usando el teorema de Green

Respuesta. $\frac{2}{3}$.

- 4) Usar el teorema de Green para calcular $\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2$, donde

$$\mathbf{I}_1 = \int_{C_1} (2x + y)^2 dx - (x - 2y)^2 dy \quad \text{e}$$

$$\mathbf{I}_2 = \int_{C_2} (2x + y)^2 dx - (x - 2y)^2 dy$$

$$C_1 : \lambda(t) = (t, t^2) \quad t \in [0, 1] \quad \text{y} \quad C_2 : \mu(t) = (t^2, t) \quad t \in [0, 1].$$

- 5) Usando el teorema de Green, determinar el área de la región limitada por
- a) la curva con ecuación vectorial $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- b) la elipse, con ecuación vectorial $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, con a y b constantes.
- 6) a) Sea C el segmento de recta que une el punto (x_1, y_1) con el punto (x_2, y_2) . Verificar que

$$\int_C x dy - y dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

- b) Si los vértices de un polígono P , ordenados contra-reloj, son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , \dots , (x_n, y_n) , verificar que el área de este polígono viene dada por:
- $$\text{Area de } P = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$
- c) Hallar el área del pentágono de vértices en los puntos $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ y $(-1, 1)$.

Respuesta. (c) 4.5.

- 7) Sea D una región en el plano delimitada por una curva simple y cerrada C .
- a) Usando el teorema de Green, verificar que las coordenadas del centroide de D , (\bar{x}, \bar{y}) , viene dado por:

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2 dy \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \oint_C y^2 dx$$

donde A es el area de D .

- b) Encontrar el centroide del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Respuesta. (b) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

6.5 Desafío

Dados

- el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\hat{j}$$

- La curva C , correspondiente al círculo $x^2 + y^2 = 1$, con orientación positiva.

- 1) Calcular la integral de línea de \vec{F} sobre la curva C .
- 2) Calcular $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$, donde D es la región encerrada por la curva C .
- 3) Discutir si estos resultados están de acuerdo o no con el Teorema de Green.