Sesión 17

Regla de L'Hopital

Temas

✓ Regla de L'Hopital.

✓ Aplicaciones de la Regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas.

Capacidades

▷ Conocer y comprender la regla de L´Hopital.

▷ Calcular límites de formas indeterminadas, usando la regla de L'Hopital.

17.1 Introducción

Johann Bernoulli
Suizo. (1667-1748)

La regla de L'Hopital se atribuye al matemático francés Guillaume François Antoine, Marqués de L'Hopital, quien dio a conocer el método en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692), el primer texto que se ha escrito sobre cálculo, influenciado por las lecturas que realizaba de sus profesores, Johann Bernoulli, Johann Bernoulli y Leibniz. Este método permite calcular ciertos límites que con los procedimientos estudiados en Cálculo I, es difícil determinar.

Esta regla, llamada también, regla de L'Hopital-Bernouilli, es utilizada para determinar límites de formas indeterminadas del tipo: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, y se puede aplicar también a otros casos indeterminados.

17.2 Formas indeterminadas

En algunas aplicaciones del Cálculo se requiere calcular por ejemplo, límites del tipo $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $f(a) = g(a) = 0$. El cálculo de estos límites no es inmediato.

Nota 17.1 Cuando una función, para cierto valor de la variable independiente, toma una de las formas:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 0\cdot\infty, \qquad \infty-\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^{\infty}, \qquad 1^{\infty}$$

se dice que es *indeterminada*.

Observación. En Cálculo I, se trató algunas técnicas para calcular límites de algunas formas indeterminadas. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Sin embargo, con las técnicas tratadas no es posible determinar $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Notar que, para $x = 0$, la función $\frac{\sin x}{x}$ es indeterminada. Pero, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ existe y es igual a 1.

Otros ejemplos de límites de formas indeterminadas son:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{2x-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{\ln(e^x+x)}$$

La Regla de L'Hopital proporciona un método para calcular límites de formas indeterminadas de los tipos:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

que se puede extender a las otras formas indeterminadas.

17.3 Regla de L'Hopital. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Teorema 17.1 Regla de L'Hôpital (forma débil).
Sean f y g son funciones derivables en $x = a$, tales que $f(a) = g(a) = 0$. Si $g'(a) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Demostración
Como $f(a) = g(a) = 0$, se tiene:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{x-a}{g(x)-g(a)}$$

Como f y g son derivables en a, y como $g'(a) \neq 0$, entonces:

- $g(x)$ es no nulo en una vecindad de $x = a$.
- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \frac{x - a}{g(x) - g(a)} \right) = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ ■

Ejemplo 17.1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

Nota 17.2 Observar los gráficos de $y = \frac{\sin x}{x}$ e $y = \cos x$, en las cercanías de $x = 0$, en el siguiente dibujo.

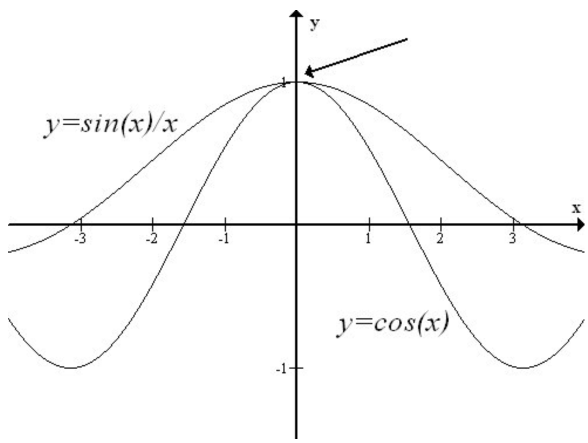


Gráfico de $y = \frac{\sin x}{x}$ *e* $y = \cos x$

Teorema 17.2 Regla de L'Hopital, primera generalización.
Sean f *y* g *funciones derivables en una vecindad del punto* $x = a$, *tal que* $g'(x)$ *es distinta de cero en esa vecindad.*
Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho sea un número real, o bien $+\infty$, *o* $-\infty$.

Nota 17.3 En esencia, la regla de L'Hopital dice que, si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = a$, entonces, con algunas restricciones, este cuociente tiene el mismo límite que en $x = a$ que el cuociente de las derivadas $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que este último límite exista (finito o infinito).

Ejemplo 17.2 $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Ejemplo 17.3 $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{2x-4} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x-1}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Ejemplo 17.4 $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x^2+x^3} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\dfrac{\cos x}{2x+3x^2}}_{\textit{no es indeterminada}} \overset{[\frac{1}{0}]}{=} \infty$

Ejercicio 17.1 Calcular $\lim_{t\to 1}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{1/2}^{t}\dfrac{x^2-1}{x\,\ln x^{3/2}}dx.$

Nota 17.4 ***Aplicación reiterada de la regla de L'Hopital***. Si el cuociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ resulta indeterminado, entonces se puede aplicar nuevamente la regla de l'Hopital por segunda vez (o tercera vez, etc.) siempre que se cumplan las condiciones. Es decir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo 17.5

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\pi\sin\pi x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\pi x\,\sin \pi x}\\
&\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi\sin\pi x+\pi^2 x\cos \pi x}\\
&= -\tfrac{1}{\pi^2}
\end{aligned}$$

17.4 Regla de L'Hopital. Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema 17.3 Regla de L'Hopital, segunda generalización.
Sean f y g funciones derivables en una vecindad de a, tales que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

Si $g'(x)$ no se anula en la vecindad de a entonces:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que el límite del lado derecho sea un número real, o bien $+\infty$, o $-\infty$.

Nota 17.5 El teorema anterior dice que, la regla de L'Hopital también se puede aplicar cuando $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\frac{\infty}{\infty}$.

Nota 17.6 La Regla de H'Hopital también se cumple cuando x tiende a $+\infty$, $-\infty$ o ∞, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 17.6

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x^3}{x^3-2x+5} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x+9x^2}{3x^2-2} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+18x}{6x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{18}{6} = 3$$

Ejemplo 17.7

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x+1} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2}}_{\textit{no es indeterminada}} \overset{[\frac{\infty}{2}]}{=} +\infty$$

Nota 17.7 Resumiendo, la Regla de L'Hopital se puede enunciar como sigue:

> Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en una vecindad de a, tal que que $g'(x) \neq 0$ cerca de a.
>
> Si para $x = a$, siendo a un número real, o $+\infty$ o $-\infty$, el cuociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada del tipo: $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$, entonces
>
> $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> siempre que el limite del segundo lado exista, o bien sea $+\infty$ o $-\infty$

17.5 Otras formas indeterminadas

Por medio de *arreglos algebraicos*, es posible aplicar la regla de L'Hopital a otras formas indeterminadas:

17.5.1 Forma indeterminada $0 \cdot \infty$

Si para $x = a$, la función $f(x) \cdot h(x)$ toma la forma indeterminada $0 \cdot \infty$, la función se escribe en la forma:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{0}{0}$$

o bien:

$$f(x) \cdot h(x) = \frac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{tomando la forma} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

y luego se aplica la regla de L'Hopital.

Ejercicio 17.2 Probar que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec 3x\ \cos 5x) = -\dfrac{5}{3}$

Ejercicio 17.3 Calcular $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}$

17.5.2 Forma indeterminada $\infty - \infty$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty = \lim_{x\to a} g(x)$ entonces se dice que $f(x)-g(x)$ tiene la forma $\infty-\infty$. Para calcular $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$ se transforma la expresión $f(x)-g(x)$ en una fracción de la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, de modo que se pueda aplicar la regla de L'Hopital.

Ejemplo 17.8

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &\overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\ &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x+\sin x}\\ &\overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-x\sin x+2\cos x}\\ &= 0\end{aligned}$$

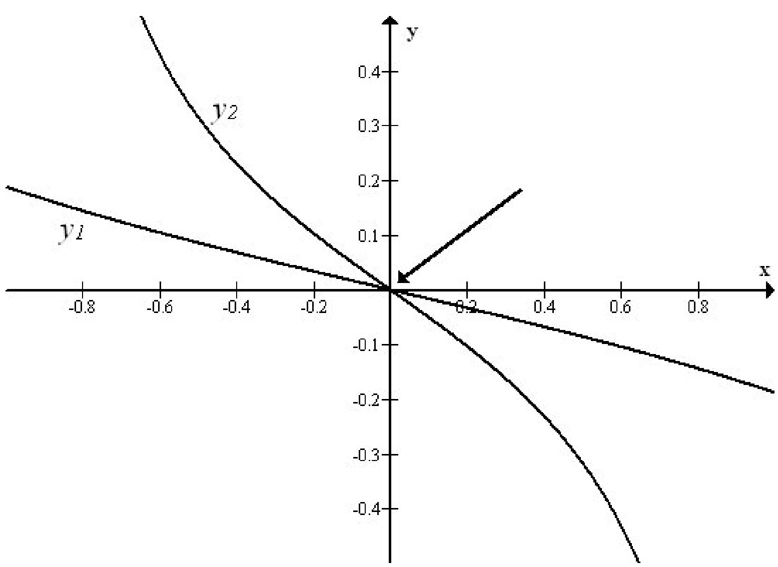


Gráfico de $y_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ *e* $y_2 = \frac{-\sin x}{-x\sin x+2\cos x}$

Ejercicio 17.4 *Probar que* $\lim_{x\to+\infty}(x^2-e^{2x}) = -\infty.$ Sugerencia: Factorizar.

17.5.3 Formas indeterminadas 0^0, 1^∞, ∞^0

Si una función de la forma $f(x)^{h(x)}$ toma una de las siguientes formas indeterminadas, cuando $x \to a$:

$$0^0, \qquad 1^\infty, \qquad \infty^0$$

entonces, para calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{h(x)}$, se procede como sigue:

- Sea $y = f(x)^{h(x)}$
- Se aplica logaritmo natural a ambos lados:

  $$\ln y = \ln f(x)^{h(x)}$$

  obteniendo:

  $$\ln y = h(x) \ln f(x)$$

  donde $h(x) \ln f(x)$ tiene la forma indeterminada:

  $$0 \cdot \infty$$

  o bien $\infty \cdot 0$.
- Determinando $\lim\limits_{x \to a} \ln y = \lim\limits_{x \to a} \ln f(x)^{h(x)}$ usando un método ya tratado, se obtiene $L = \lim\limits_{x \to a} \ln y$.
- Luego:

  $$\lim_{x \to a} f(x)^{h(x)} = \lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} e^{\ln y} = e^{\left(\lim\limits_{x \to a} \ln y\right)} = e^L$$

Ejemplo 17.9 Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$
Solución

La función x^x toma la forma 0^0 cuando $x \to 0^+$.

- Sea $y = x^x$.

  $\ln y = x \ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ es de la forma $\frac{-\infty}{\infty}$, cuando $x \to 0^+$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$
- Luego: $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = 0$
- Por lo tanto: $\lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1$

Ejercicio 17.5 Probar que $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

17.6 Autoevaluación

Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} x\cot x$

b) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$

c) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{1/x}-1)$

d) $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(t^2+4)}{\ln(t-1)}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ x - x}{x-\sin\ x}$

f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin\ x)}{(\pi-2x)^2}$

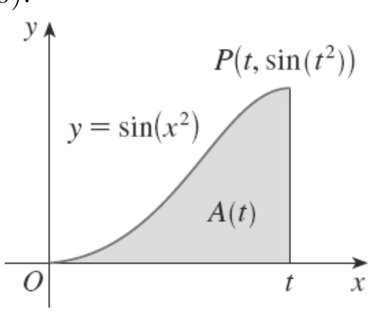
g) $\lim_{u\to 3}\frac{1}{u-3}\int_3^u \frac{\sin x}{x}dx$

h) $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}(1-x)dx$

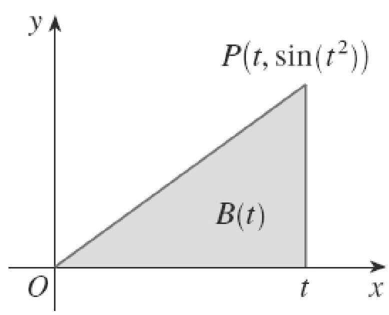
Respuestas: a) 1 b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 2 f) $-\frac{1}{8}$ g) 0.047 h) 0

17.7 Desafío

Las siguientes figuras muestran dos, A y B regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $t=\sin(x^2)$ de 0 a t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t,0)$.



Area $A(t)$



Area $B(t)$

Calcular

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{A(t)}{B(t)}$$