1. Definición

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto y una recta dada. Más claramente:

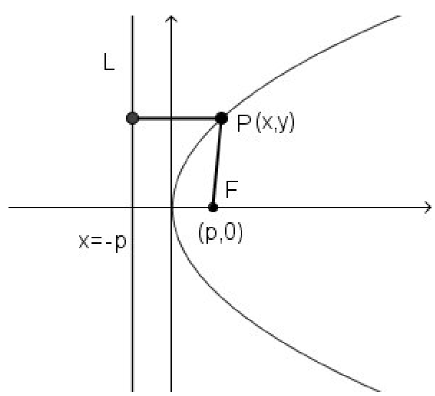
Dados (elementos bases de la elipse)

- *Una recta L, llamada* directriz *de la parábola.*
- *Un punto F del plano, denominado* foco *de la parábola, con $\underline{F \notin L}$.*

se llama **parábola** *al lugar geométrico de todos los puntos del plano que tienen la misma distancia al punto F y a la recta L, es decir*

$$d(P,F) = d(P,L) \tag{1}$$

2. Deducción de la ecuación de la elipse



Para obtener la ecuación más simple de la parábola:

- Se toma el eje X como la recta que pasa por F y es perpendicular a la recta dada L. Esta recta recibe el nombre de *eje de la parábola*.
- Sea A el punto de intersección entre el eje y la directriz de la parábola. Se toma como eje Y la recta perpendicular al eje en el punto medio del segmento AF.
- En este sistema de coordenadas, sean: $F = (p,0)$ y $x = -p$ la ecuación de la directriz.

Luego, la condición (1), queda

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p| \tag{2}$$

desarrollando (elevando al cuadrado y ordenando):

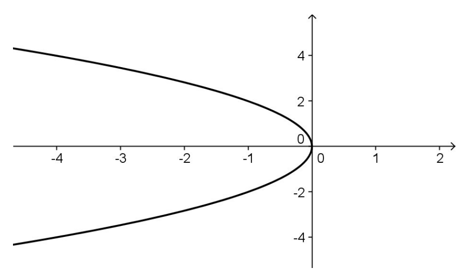
$$y^2 = 4px \tag{3}$$

3. Elementos asociados a una elipse

- *Foco*: es el punto dado (y fijo), en este caso, $F(p, 0)$.
- *Directriz*: es la recta dada L, en este caso, $x = -p$.
- *Eje*: Es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz (en este caso, el eje X).
- *Vértice*: Es el punto medio del segmento AF (en este caso, el origen del sistema).
- *Lado recto*: Es el segmento perpendicular al eje, que une dos puntos de la parábola y que pasa por su foco.

Notas:

1. La longitud del lado recto de (3) es $4p$.
2. En el caso recién estudiado se ha supuesto $p > 0$. Cuando $p < 0$ la parábola *se abre hacia la izquierda.*



Gráfica de $y^2 = -4x$

3. Si el eje focal de la parábola coincide con el eje Y, de manera que el foco sea $(0, p)$, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py \tag{4}$$

4. Ejemplo

Una parábola cuyo vértice esta en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4, -2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

5. Parábola con centro (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado

- La ecuación de la parábola de centro en el punto (h, k) y eje paralelo al eje X , esta dada por

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \tag{5}$$

siendo p la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

- La ecuación de la parábola de centro en el punto (h, k) y eje es paralelo al eje Y, la ecuación es

$$(x-k)^2 = 4p(y-h) \tag{6}$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

- Desarrollando la ecuación (5) se obtiene la ecuación

$$y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0 \tag{7}$$

¿Bajo que condiciones (5) representa una parábola?.

- Al desarrollar (6) se obtiene la ecuación

$$x^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0 \tag{8}$$

6. Ejemplo

Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola. Obtener su gráfico.

7. Parabolas y rectas tangentes

1. Sea (x_0, y_0) es un punto en la parábola (3). La ecuación de la recta tangente a la elipse en este punto es

$$y_0y = 2p(x + x_1) \tag{9}$$

2. Las rectas tangentes a la parábola (3) de pendientes m son:

$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0. \tag{10}$$

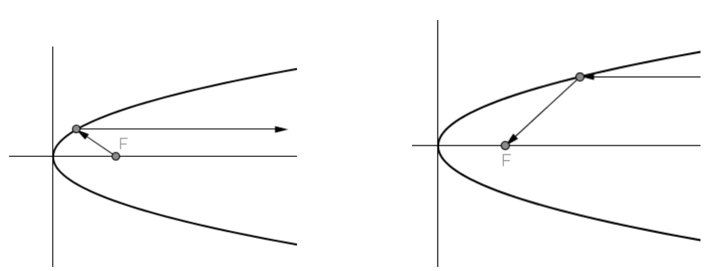
3. Tangentes trazadas desde un punto exterior a la elipse.

   Actividad: Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde punto $(2, -4)$ a la parábola $x^2-6x-4y+17 = 0$.

8. Aplicaciones

8.1. Propiedad óptica

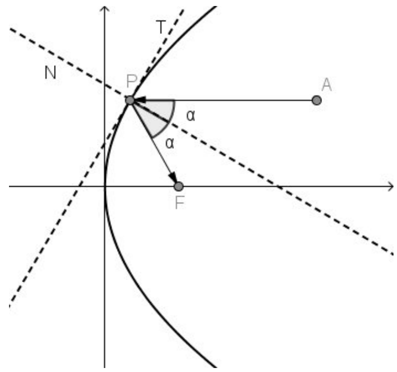
Se considera un espejo que tenga forma de parábola. Si un rayo de luz parte de su foco choca contra el espejo y se refleja siguiendo una dirección paralela a su eje. Del mismo modo un rayo de luz paralelo a su eje se refleja hacia su foco. Por esta razón, por ejemplo, los focos de los vehículos tienen forma parabólica.



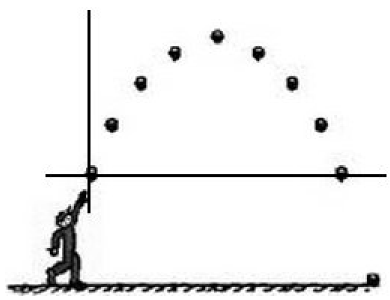
Esta propiedad de la parábola proviene del siguiente:

8.2. Teorema

La normal a la parábola en un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de P_0 (segmento P_0F) y la recta que pasa por P_0 y es paralela a1 eje de la parábola.



8.3. Lanzamiento de proyectiles (movimientos parabólicos)



Al lanzar un proyectil (piedra, balón, etc.) con velocidad inicial v_0 en una dirección que forma un ángulo α con la horizontal, el proyectil describe una parábola. Asumiendo que el proyectil es lanzado desde el origen de coordenadas, la ecuación de su trayectoria es

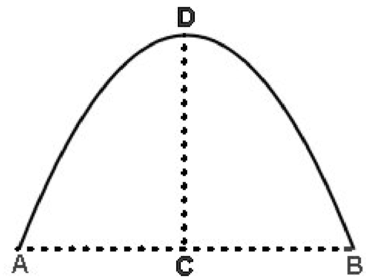
$$y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2, \tag{11}$$

donde g es la aceleración de gravedad, cuyo valor es $\approx 9{,}8\mathrm{m}/s^2$.

8.4. Arco parabólico

Iglesia de Chillán

De las diversas formas de arcos usadas en construcción, una tiene la forma de un *arco parabólico*. La longitud de su base (AB en la siguiente figura) recibe el nombre de *claro* o *luz* (o *claro de luz*) del arco y la altura máxima a sobre la base *altura* del arco (CD).



Arco parabólico

9. Actividades

1. Para cada una de las siguientes parábolas, encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

   a) $y^2 = 12x$ b) $x^2 = 12y$ c) $y^2 + 8x = 0$ d) $x^2 + 2y = 0$

   Sol. a) $(3, 0)$, $x = -3$, 12. b) $(0, 3)$, $y = -3$, 12. c) $(-2, 0)$, $x = 2$, 8.

2. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$. *Sol.* $x^2 = -12y$.

3. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar su ecuación, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.
   Sol. $y^2 = -8x$, $(-2, 0)$, $x = 2$, 8.

4. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.
   Sol. $4\sqrt{5}$.

5. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

6. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Verificar que es tangente a la directriz de la parábola.

7. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene foco $(-1, 1)$ y directriz la recta $x + y - 5 = 0$. Graficar.
   Sol. $x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 6y - 21 = 0$.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje. *Sol.* $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$, $x = -7$, $y = 3$.

9. La directriz de una parábola es la recta $y = 1$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de esta parábola por dos métodos diferentes. *Sol.* $(x - 4)^2 = -8(y + 1)$.

10. Expresar las ecuaciones de las siguientes parábolas en base a los formatos (5) o (6) y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

    a) $4y^2 - 48x - 20y = 71$ b) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

    Sol. a) $(y - \frac{5}{2})^2 = 12(x + 2)$, $(-2, \frac{5}{2})$, $(1, \frac{5}{2})$, $x = -5$, $y = \frac{5}{2}$, 12. b) $(x + \frac{4}{3})^2 = -8y$, $(-\frac{4}{3}, 0)$, $(-\frac{4}{3}, -2)$, $y = 2$, $x = -\frac{4}{3}$, 8.

11. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(2, 8)$ y $(-1, 5)$. *Sol.* $y = 3x^2 - 2x$.

12. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo a1 eje X y que pasa por los tres puntos (0,0), $(8. - 4)$ y (3,1). *Sol.* $y^2 - x + 2y = 0$.

13. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y = 1$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. *Sol.* $x^2 - 4y - 4 = 0$, $x^2 + 8y - 16 = 0$.

14. Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y^2 - 4x = 0$ en su punto $(1, 2)$. *Sol.* $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$. *Sol.* $x + y + 2 = 0$.

16. Del punto $(-1, -1)$, se trazan dos tangentes a las parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas. *Sol.* $\approx 36°2'$.

17. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

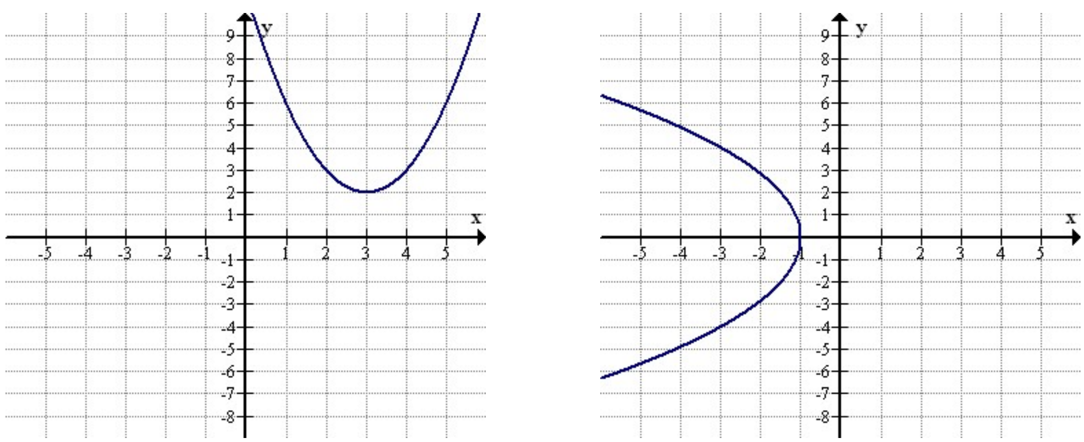
    a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes

    b) son tangentes a la parábola

    c) no cortan a la parábola.

    Sol. a) $k < 8$, b) $k = 8$, c) $k > 8$

18. Determinar las ecuaciones de las siguientes parábolas:



    Sol. $x^2 - 6x - y + 11 = 0$, $y^2 + 8x + 8 = 0$

19. Se patea un balón de fútbol con un ángulo de 37° con una velocidad de 20m/s.

    a) Determinar la ecuación de la trayectoria de la pelota

    b) ¿A que distancia del lugar del lanzamiento cae la pelota?

20. Determinar la ecuación del arco parabólico cuyo claro de luz es de 12m y cuya altura es de 6m.

21. Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de 150 metros y la depresión de 20 metros.

22. A partir de la definición de la parábola obtener su gráfico en el software Geogebra.