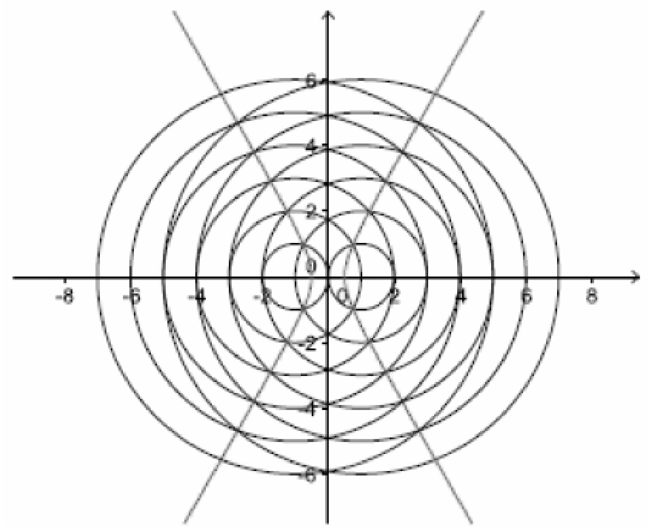
Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física



Apuntes de Geometría Analítica

Claudio del Pino O.

2011

Introducción

Estos apuntes, en su versión preliminar, se ha escrito para proporcionar un material de apoyo, en la temática de Geometría Analítica para estudiantes de ingeniería de la Universidad de Talca.

En este Apunte se abordan 5 unidades temáticas:

- La línea recta
- La circunferencia
- La parábola
- La elipse
- La hipérbola

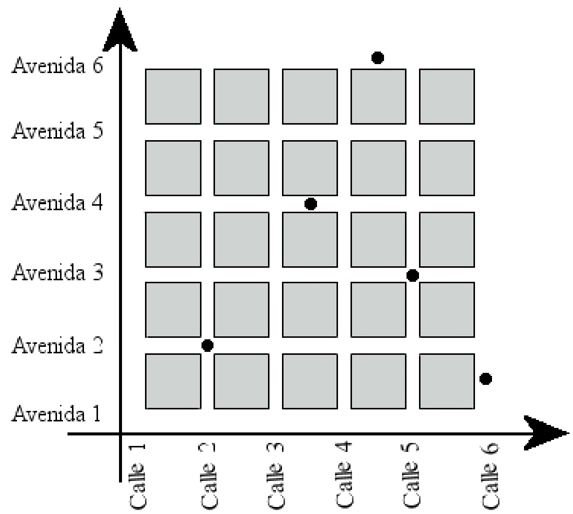
En cada unidad se presentan, en forma resumida, las definiciones, propiedades y herramientas de cada tema, junto a una cantidad interesante de ejercicios con solución.

En algunas unidades se han usado como referencia los apuntes de *Cálculo* del profesor Alvaro Rodríguez L. y los apuntes de *Matemática* de la profesora Patricia González P.

Es importante destacar que este Apunte en sí *no es suficiente* como único material a utilizar por los estudiantes en su preparación, él es sólo un complemento a la clases del profesor, a las sesiones de ayudantía y talleres contemplados en el desarrollo del curso.

Se acogerá con agrado sus comentarios, ideas o cualquier observación que contribuya al enriquecimiento de estas notas.

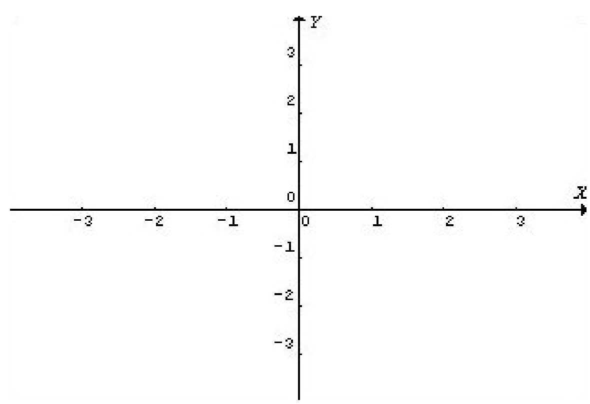
Claudio del Pino O.



1. El plano cartesiano

Para representar puntos en un plano, definidos por un par ordenado de números reales, se utiliza generalmente el sistema de coordenadas rectangulares, que se caracteriza por:

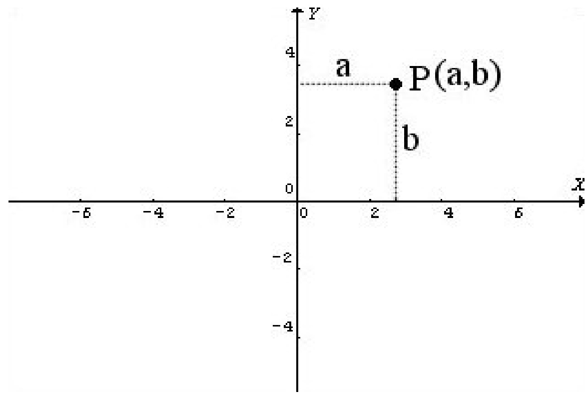
- Estar formado por dos rectas reales dirigidas, mutuamente perpendiculares, llamadas *ejes coordenados*: eje X (*eje de las abscisas*), normalmente horizontal y eje Y (*eje de las ordenadas*), normalmente vertical.
- El punto de intersección de los dos ejes es el *origen* del sistema, y se denota por O.
- El eje X está orientado (crece) de izquierda a derecha y el eje Y de abajo hacia arriba.
- El número 0 de ambos ejes se ubica en el origen del sistema.



Plano cartesiano

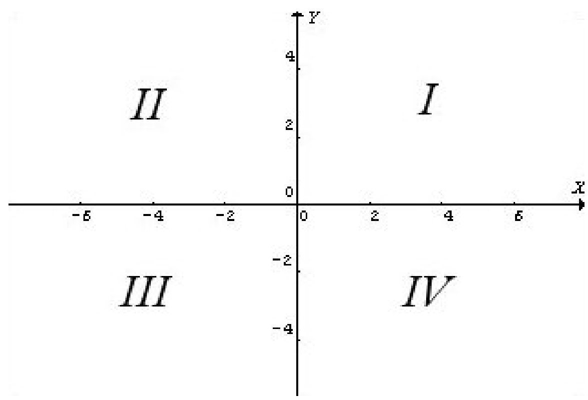
La posición de un punto P en el plano cartesiano queda determinado por un par de números reales (a, b), donde

- Los números a y b reciben el nombre de *coordenadas* del punto P.
- La primera coordenada, a, recibe el nombre de *abscisa* de P. La segunda coordenada, b, recibe el nombre de *ordenada* de P.
- La abscisa de P corresponde a la distancia dirigida de P al eje Y. La ordenada de P corresponde a la distancia dirigida de P al eje X.



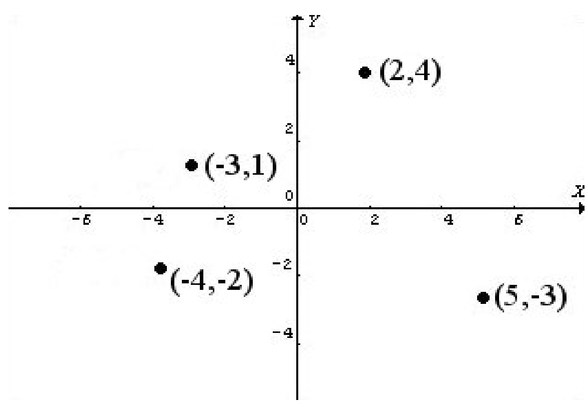
Posición de un punto

Es claro que los ejes coordenados dividen al plano en 4 sectores. Estos sectores reciben el nombre de *cuadrantes*. Los cuadrantes se designan por I, II, III y IV, tal como se muestra en la siguiente figura:



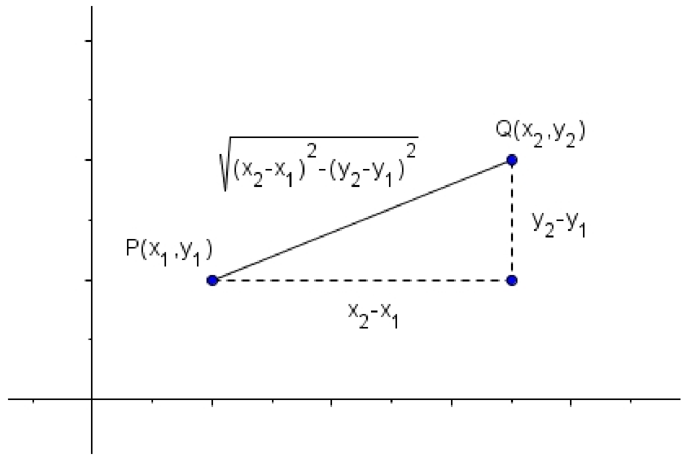
Cuadrantes

En la siguiente figura se muestran las posiciones de 4 puntos con sus respectivas coordenadas:



Coordenadas de puntos

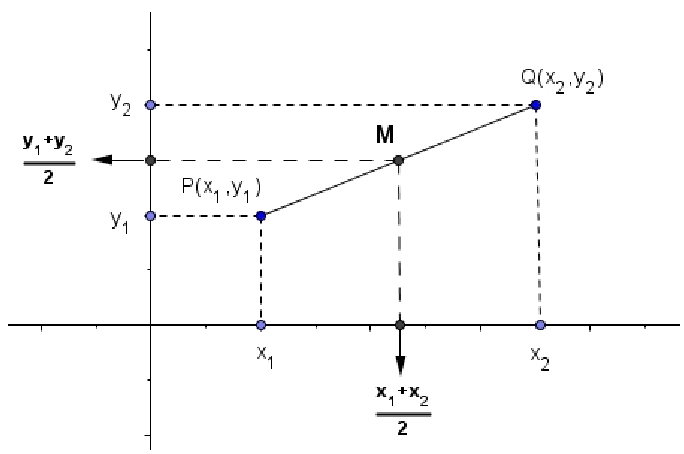
2. Distancia entre dos puntos del plano



La distancia entre dos puntos del plano $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, que se denota por $d(P, Q)$, viene dada por la fórmula:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. Punto medio de un segmento



El punto medio de un segmento cuyos puntos extremos son $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$, que se denota por $M(P, Q)$, viene dada por la fórmula:

$$M(P, Q) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

4. Gráfica de ecuaciones

Una ecuación es una relación entre las variables x e y. Ejemplos de ecuaciones son:

$$x = 1, \qquad x + 2y = 6, \qquad x^2 + (y - 3)^2 = 4, \qquad y^2 = x^2, \qquad y = 2x^2 - 3x + 6$$

Graficar una ecuación es representar en un plano cartesiano el conjunto de todos los puntos (x, y) que la satisfacen. Para ello, en general, se procede de la siguiente manera:

Paso 1 Construir una tabla de valores, del tipo:

x	y
$\vdots$	$\vdots$

para algunos valores de x y sus correspondientes valores de y.

Paso 2 Graficar en un sistema de coordenadas los puntos obtenidos en la tabla de valores precedente.

Paso 3 *Unir* con una curva *suave* los puntos recién graficados.

Observación: En caso de tener alguna duda al trazar la curva (en el paso 3) se debe *refinar* la tabla de valores, agregando nuevos puntos de la curva.

5. Ayudas para graficar ecuaciones

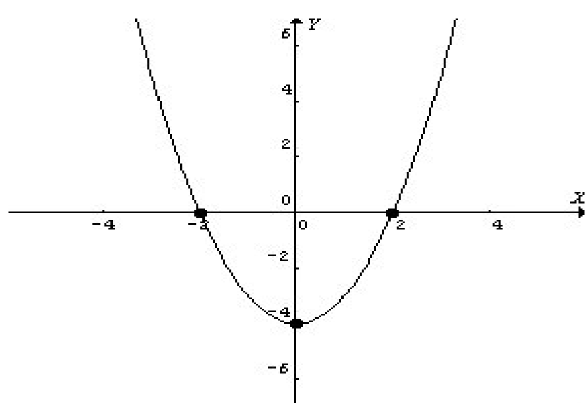
Algunas veces es de utilidad, en la obtención del gráfico de una ecuación, realizar los siguientes estudios.

5.1. Intersecciones con los ejes coordenados

Intersecciones con el eje X
Para determinar el (o los) punto(s), en caso que exista(n), donde el gráfico de una ecuación intersecta al eje X, se sustituye en la ecuación y por 0 y se despeja la variable x.

Intersecciones con el eje Y
Para determinar el (o los) punto(s), en caso que exista(n), donde el gráfico de una ecuación intersecta al eje Y, se sustituye en la ecuación x por 0 y se despeja la variable y.

Así por ejemplo, la ecuación $y = x^2 - 4$ intersecta al eje X en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$, y al eje y en el punto $(0, -4)$. Esta situación se muestra en el siguiente gráfico:



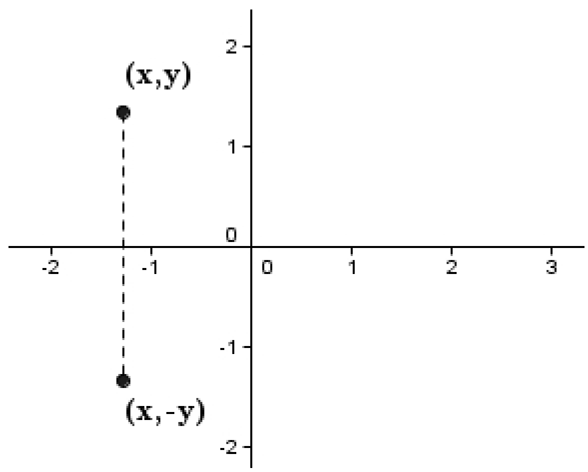
Intersecciones con los ejes coordenados de la ecuación $y = x^2 - 4$

5.2. Simetría respecto al eje X

El gráfico de una ecuación es simétrica respecto al eje X, cuando al cambiar en la ecuación la variable y por $-y$, la ecuación no cambia. Es decir,

$$(x, y) \in \text{gráfico} \qquad \Longrightarrow \qquad (x, -y) \in \text{gráfico}$$

Nota: Geométricamente, el gráfico de una ecuación es simétrico respecto al eje X, cuando al girar el gráfico en torno al eje X, *su parte superior e inferior coinciden.*



Puntos simétricos respecto eje X

Ejemplos de ecuaciones cuyas gráficas son simétricas respecto al eje X son:

$$x + y^2 = 5, \qquad -x^3 + y^4 = 10, \qquad xy^2 + x^2y^6 = 10$$

Así, por ejemplo, los gráficos de las dos primeras ecuaciones son:

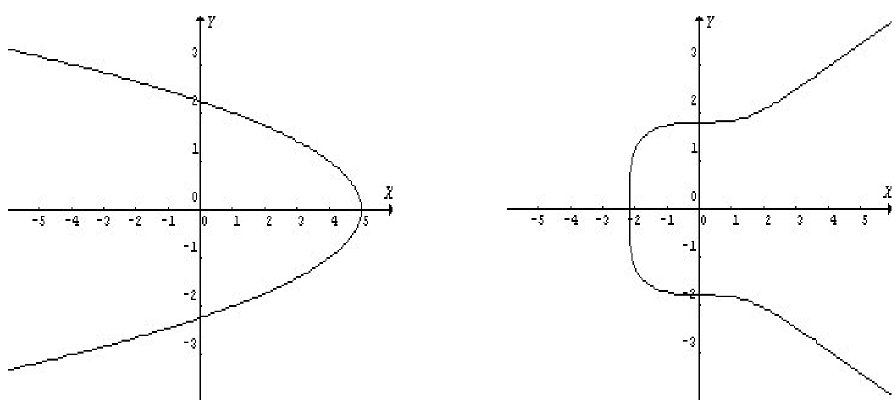


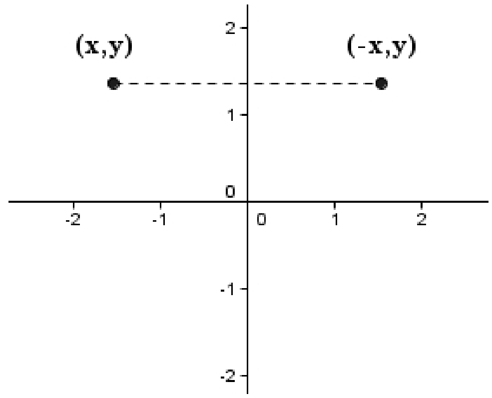
Gráfico de ecuaciones simétricas respecto al eje X

5.3. Simetría respecto al eje Y

El gráfico de una ecuación es simétrica respecto al eje Y, cuando al cambiar en la ecuación la variable x por $-x$, la ecuación no cambia. Es decir,

$$(x, y) \in \text{gráfico} \qquad \Longrightarrow \qquad (-x, y) \in \text{gráfico}$$

Nota: Geométricamente, el gráfico de una ecuación es simétrico respecto al eje Y, cuando al *girar* el gráfico en torno al eje Y, *su parte derecha e izquierda coinciden.*



Puntos simétricos respecto eje Y

Ejemplos de ecuaciones cuyas gráficas son simétricas respecto al eje Y son:

$$x^2 + y = 5, \qquad -x^4 + y^3 = 10, \qquad x^2y + x^4y^2 = 10$$

Así, por ejemplo, los gráficos de las dos primeras ecuaciones son:

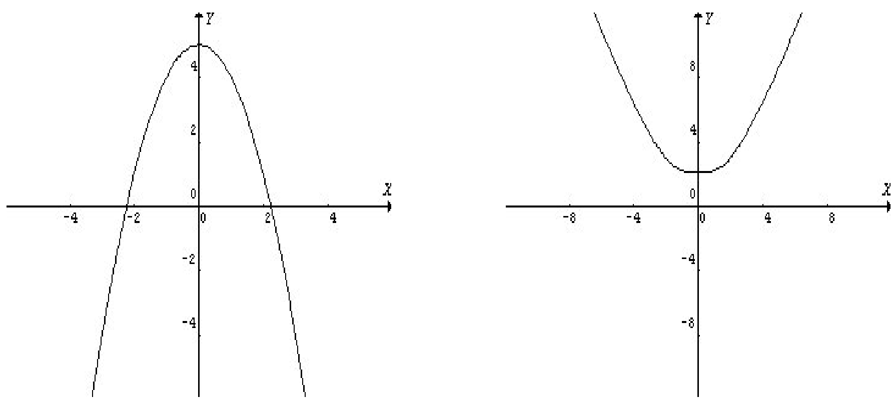
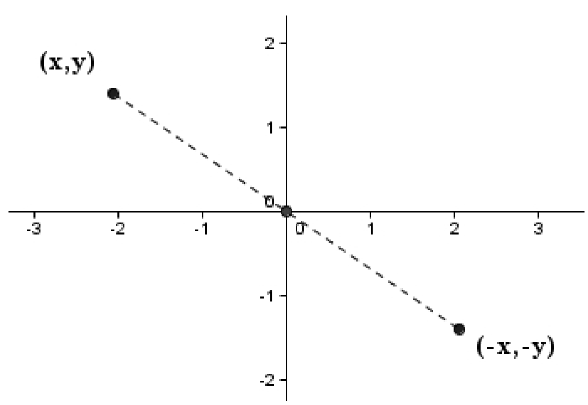


Gráfico de ecuaciones simétricas respecto al eje Y

5.4. Simetría respecto al origen



Puntos simétricos respecto al origen

El gráfico de una ecuación es simétrica respecto al origen, cuando al cambiar simultáneamente en la ecuación la variable x por $-x$ y la variable y por $-y$, la ecuación no cambia. Es decir:

$$(x, y) \in \text{gráfico} \qquad \Longrightarrow \qquad (-x, -y) \in \text{gráfico}$$

Ejemplos de ecuaciones cuyas gráficas son simétricas respecto al origen son:

$$x^2 + 2y^2 = 5, \qquad xy = 10, \qquad x^2y^2 + x^4y^2 = 10$$

Así, por ejemplo, los gráficos de las dos primeras ecuaciones son:

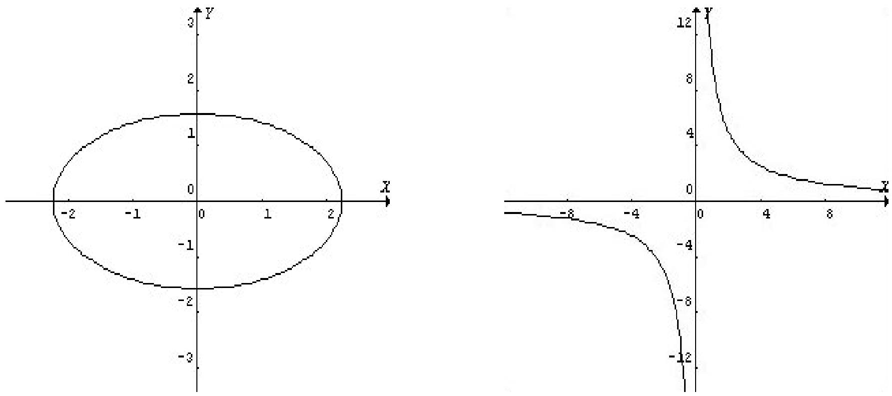


Gráfico de ecuaciones simétricas respecto al origen

6. Actividades

1. Identificar y graficar todos los puntos del plano cartesiano que cumplen cada una de las siguientes condiciones:
   a) $x = 3$ b) $x^2 = 1$ c) $(x + 2)(y - 3) = 0$ d) $x < 2$
   Sol.: a) Recta paralela al eje Y, que se encuentra a 3 unidades, a la derecha del eje Y. c) son los puntos que están a -2 unidades del eje Y (recta vertical que pasa por el punto $(-2, 0)$) o 3 unidades del eje X (recta horizontal que pasa por el punto $(0, 3)$).

2. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $A = (3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo B es 6, determinar su ordenada. *Sol.*: $y = -6$ o $y = 2$

3. Determinar los puntos que dividen en cuatro partes iguales al segmento con extremos $A = (1, 8)$ y $B = (-5, 40)$. *Sol.*: $(-\frac{1}{2}, 16)$, $(-2, 24)$ y $(-\frac{7}{2}, 32)$.

4. Determinar los vértices de un triángulo sabiendo que los puntos medios de sus lados son $(2, 4)$, $(6, 6)$ y $(-4, -2)$. *Sol.*: $(-8, -4)$, $(0, 0)$ y $(12, 12)$.

5. Encontrar un punto del eje Y que equidiste de los puntos $A = (5, -5)$ y $B = (1, 1)$. *Sol.*: $(0, -4)$.

6. Decidir si el triángulo cuyos vértices son los puntos $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$ y $C = (4, 3)$ es o no un triángulo rectángulo. *Sol.*: Si.

7. Un triángulo equilátero OAB, cuyo lado tiene una longitud a, está colocado de tal manera que el vértice O está en el origen, el vértice A está sobre el eje X y a la derecha de O, y el vértice B está arriba del eje X. Hallar las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo. *Sol.*: $A = (a, 0)$, $B = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2})$, área $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

8. Los vértices de un triángulo son $A(-1{,}3)$, $B(3, 5)$ y $C(7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC, verificar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

9. Estudiar intersecciones con los ejes coordenados y simetrías de la curva de ecuación $3x^3y^2+x^2+x+32y^4 = 2$. *Sol.*: a) Eje X: $(1,0)$, $(-2,0)$. Eje Y: $(0,\frac{1}{2})$ y $(0,-\frac{1}{2})$. b) Hay simetría eje X. No hay simetría eje Y ni respecto al origen. c)

10. Dada la ecuación $y^2 = \frac{x^2(2-x)}{2+x}$, cuyo gráfico recibe el nombre de *estrofoide recto*, se pide:

    a) Intersecciones con los ejes coordenados.

    b) Rango de variación de la variable x.

    c) Estudiar simetrías (eje X, eje Y, origen de coordenadas)

    d) Completar la siguiente tabla de valores

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0.5	1	1.5	2
y								

    e) En base a la información anterior, obtener un esbozo del gráfico de esta curva.

    Sol.: Eje X: $(0,0)$, $(2,0)$, Eje Y: $(0,0)$ b) $-2 \leq x \leq 2$ c) Solo simetría eje X

11. Considerar los puntos $A = (1,5)$ y $B = (7,3)$.

    a) Encontrar un punto del plano que *equidiste* (esté a igual distancia) de los puntos A y B.

    b) Determinar la ecuación que satisfacen todos puntos que equidistan de A y B.

    c) Graficar la ecuación obtenida en (b).

    Sol.: a) $(4,4)$ (punto medio del segmento AB) b) $3x - y = 8$.

12. Buscar una ecuación que cumpla cada una de las siguientes condiciones:

    a) La gráfica tiene intersección con el eje X en $x = -1$, $x = 2$ y $x = 5$.

    b) La gráfica es simétrica respecto al eje X.

    c) La gráfica es simétrica respecto al origen, pero no es simétrica respecto al eje Y.

13. Graficar cada una de la siguientes ecuaciones, estudiando previamente sus intersecciones con los ejes coordenados y sus posibles simetrías.

    a) $y = x^2 + 3$ b) $y = \sqrt{9 - x^2}$ c) $y = x^3$
    d) $y = 1 - x^2$ e) $x + y^2 = 3$ f) $x^2 - y^2 = 4$

14. A continuación se entregan 4 gráficos:

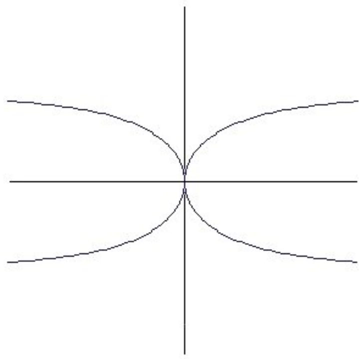
    a) Por inspección de cada gráfico, determinar si tiene o no simetría con respecto al eje X, Y y origen.

    b) Si las ecuaciones de los gráficos (¡sin orden!) son:

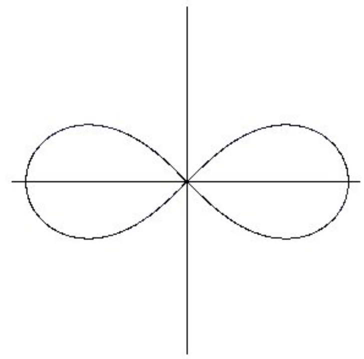
    (A) $x^3 + y^3 = 3xy$ (B) $y^2(x^2 + y^2) = x^2$
    (C) $y^2(1 + x) = x^2(3 - x)$ (D) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

    establecer la correspondencia entre los gráficos de (a) y sus correspondientes ecuaciones.

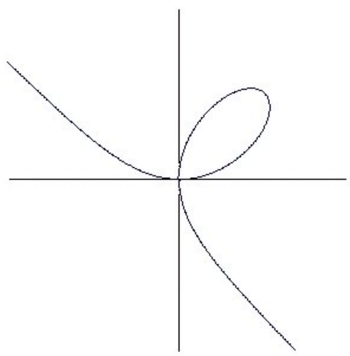
    c) Una vez realizada la correspondencia entre los gráficos y sus ecuaciones, corroborar sus respuestas dadas en (a) trabajando con las ecuaciones de las curvas.



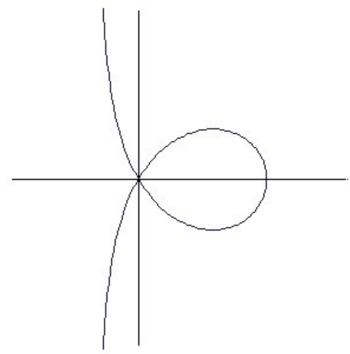
(1) *Curva Kappa*



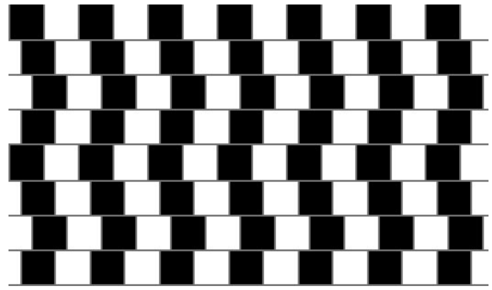
(2) *Lemniscata de Bernoulli*



(3) *Hoja de Descartes*



(4) *Trisectriz de Maclaurin*



¿Líneas rectas?

1. La línea recta

La línea recta corresponde a todos los puntos del plano que cumplen la ecuación

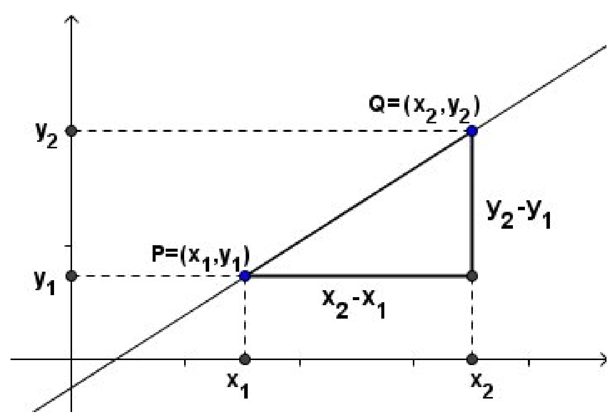
$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

con $A \neq 0$ o $B \neq 0$. Esta ecuación se denomina *ecuación general de una recta.*

2. Pendiente de una recta

Sea L una recta y $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos (distintos) de la recta L. Se llama *pendiente de la recta* L al número

$$m_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{con} \quad x_1 \neq x_2. \tag{2}$$



Nota: En la ecuación general de la recta (1), la pendiente es $m = -A/B$ (cuando $B \neq 0$).

3. Ecuación pendiente-punto de una recta

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (a, b)$ y tiene pendiente m es

$$y - b = m(x - a) \tag{3}$$

Nota:

1. En este caso no se incluyen las rectas verticales. ¿Por qué?.
2. La ecuación de una recta vertical que intersecta al eje X en el punto $(a, 0)$, es $x = a$.

4. Rectas paralelas-perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces:

$$L_1 \parallel L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 = m_2 \tag{4}$$

$$L_1 \perp L_2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1 \tag{5}$$

5. Distancia punto-recta

Sean $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera del plano y $L : Ax + By + C = 0$ una recta. La distancia del punto P a la recta L se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{6}$$

6. Ángulo formado por dos rectas

Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. El ángulo *agudo* α que ellas forman, se puede calcular a partir de la fórmula:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \tag{7}$$

Nota: Observar que de esta fórmula es posible deducir las relaciones (4) y (5).

7. Actividades

1. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$. *Sol.* $y + 4x - 10 = 0$.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (a, b) y por la intersección de las rectas $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. *Sol.* $b^2x - a^2y = a^2(a - b)$.

3. El punto P de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $(7, -2)$. Calcular la abscisa de P. *Sol.* 11.

4. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$. *Sol.* $3x - 5y + 8 = 0$.

5. Hallar las intersecciones con los ejes coordenados de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 7y + 2 = 0$. *Sol.* $(-\frac{17}{2}, 0)$, $(0, \frac{17}{7})$.

6. Sean L_1 la recta de ecuación $y + 8x = 0$ y L_2 la recta que pasa por el punto $(0, 18)$ y tiene pendiente -3. Se pide encontrar:

   a) El punto B de intersección entre L_1 y L_2.

   b) El área del triángulo OBC, donde O es el origen y C es el punto donde L_2 corta el eje X.

   Sol. a) $(-\frac{18}{5}, \frac{144}{5})$ b) $\frac{432}{5}$

7. Determinar el valor de k $(k > 0)$ para que la recta $4x + 5y - k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{5}{2}$ unidades cuadradas. *Sol.* 10.

8. Probar que la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, 2)$ bisecta (dimidia) al segmento cuyos extremos son los puntos $(8, -3)$ y $(-4, -3)$.

9. Determinar el(los) valor(es) de k para que:

   a) La recta $L_1 : kx + (3 - k)y + 7 = 0$ sea perpendicular a la recta $x + 7y + 1 = 0$.

   b) La recta $L_2 : kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

   c) La recta $L_3 : (2 + k)x - (3 - k)y + 4k = -14$ contenga al punto $P(2, 3)$.

   Sol. a) $\frac{21}{6}$ b) $\frac{3}{5}$ c) -1.

10. Dados los puntos $A(-1, 1)$; $B(3, 5)$ y $C(0, -2)$. Se pide:

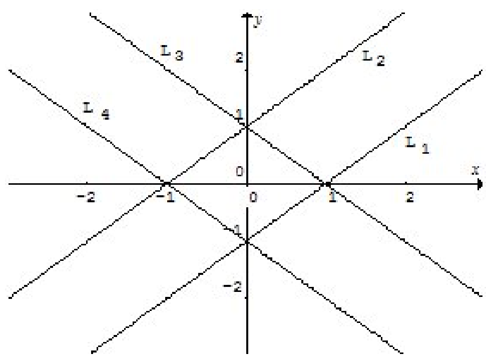
    a) Encontrar la ecuación de la recta L que pasa por C y el punto medio del segmento AB.

    b) Determinar la ecuación de la recta M que pasa por B y C.

    c) Calcular la distancia de A a la recta M y el área del triángulo ABC.

    Sol. a) $7x - 3y = 6$ b) $7x - 3y = 6$ c) $\frac{8}{29}$, $\frac{4\sqrt{58}}{29}$.

11. Determinar las ecuaciones de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 que aparecen en la siguiente figura:

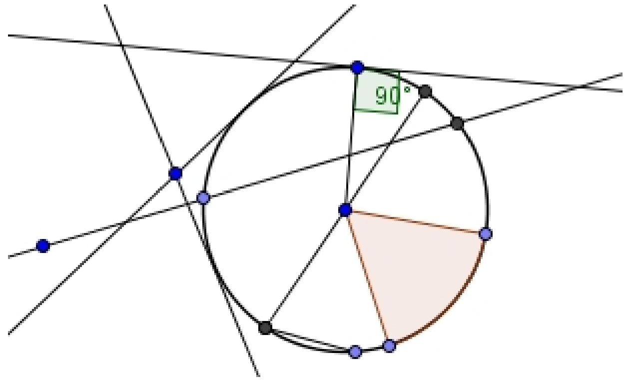


    Sol. $L_1 : x - y = 1$, $L_2 : y - x = 1$, $L_3 : x + y = 1$, $L_4 : x + y = -1$

12. Los vértices de un triángulo son $(1, 1)$, (4,7) y (6,3). Verificar que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (punto de intersección de las alturas) son colineales.

13. Usando el programa Geogebra[1], investigar como se pueden graficar las familias de rectas $y = m * x$ e $y = x + k$.

[1] Geogebra es programa gratuito con opciones de algebra y geometría (de ahí su nombre). Se puede bajar desde http://geogebra.softonic.com/



Algunos elementos claves en una circunferencia. ¿Cuántos puede reconocer?

1. Definición

Dados (elementos bases de la circunferencia)

- *Un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ del plano.*
- *Un número positivo r.*

se llama **circunferencia** *de centro P y radio r, al conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ que satisfacen la condición*

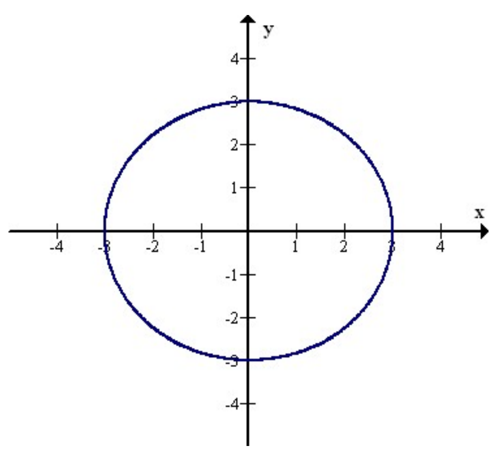
$$d(P, P_0) = r \tag{1}$$

es decir, que cumplen la ecuación

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \tag{2}$$

o sea,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{3}$$



Circunferencia de centro $(0, 0)$ *y radio* 3.
Ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

Nota: Desarrollando la ecuación (3), se obtiene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

el siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales la ecuación (4) representa una circunferencia.

2. Teorema

La ecuación (4):

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una circunferencia siempre y cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

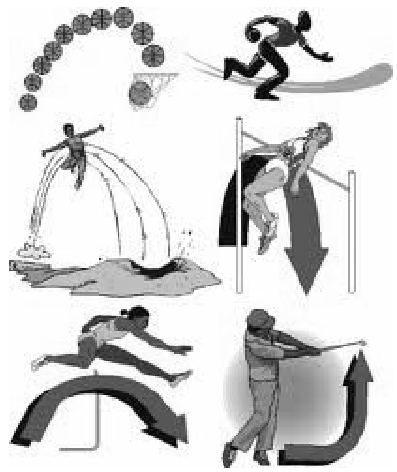
3. Ejemplos

1. Escribir una ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio 2.
2. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
3. Encontrar una ecuación de la circunferencia de centro $(1, 2)$ y que pasa por el punto $(2, 1)$.

4. Actividades

1. *a*) Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $(-1, 5)$ y $(-3, -3)$. Encontrar su ecuación. *Sol.* $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 17$.
   b) Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los extremos de un diámetro de una circunferencia, comprobar que su ecuación puede escribirse como $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.
   c) Comprobar su respuesta en (a) usando (b).
2. Hallar una ecuación de la(s) circunferencia(s) pasa por el origen, tiene radio 2 y su centro esta en la recta $y = 2x$. *Sol.* $(x - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + (y - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 4$
3. Hallar la circunferencia que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(5, 2)$ sabiendo que su centro esta el la recta $2x - y + 6 = 0$. *Sol.* $(x - 14)^2 + (y - 34)^2 = 1105$.
4. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(2, 5)$ y es tangente a la recta $y = 2x$.
   Sol. $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \frac{1}{5}$.
5. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(2, 5)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. *Sol.* $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{29} - 1)^2$.
6. Encontrar, *de dos maneras diferentes*, la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 3)$, $B(1, -1)$ y $C(-3, 1)$. *Sol.* $9x^2 + 9y^2 + 5x - 26y - 49 = 0$.
7. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$, trazadas desde el punto $A(-1, -2)$. *Sol.* $y + 2 = -\frac{24}{7}(x + 1), \quad y = -2$
8. ¿En qué puntos se cortan la recta $x + y - 5 = 0$ con la circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt{13}$? *Sol.* $(2, 3)$, $(3, 2)$.
9. Calcular, en caso que existan, los puntos de intersección entre los siguientes pares de circunferencias:
   a) $C_1 : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ y $C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 11 = 0$
   b) C_1 y $C_3 : x^2 + y^2 - 6x - 6y + 21 = 0$

   Sol. a) $(3, 2)$ y $(1, 4)$ b) No se intersectan.



1. Definición

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto y una recta dada. Más claramente:

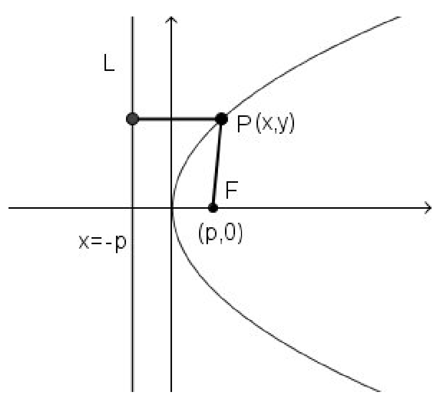
Dados (elementos bases de la elipse)

- *Una recta L, llamada* directriz *de la parábola.*
- *Un punto F del plano, denominado* foco *de la parábola, con $\underline{F \notin L}$.*

se llama **parábola** *al lugar geométrico de todos los puntos del plano que tienen la misma distancia al punto F y a la recta L, es decir*

$$d(P,F) = d(P,L) \tag{1}$$

2. Deducción de la ecuación de la elipse



Para obtener la ecuación más simple de la parábola:

- Se toma el eje X como la recta que pasa por F y es perpendicular a la recta dada L. Esta recta recibe el nombre de *eje de la parábola.*
- Sea A el punto de intersección entre el eje y la directriz de la parábola. Se toma como eje Y la recta perpendicular al eje en el punto medio del segmento AF.
- En este sistema de coordenadas, sean: $F = (p,0)$ y $x = -p$ la ecuación de la directriz.

Luego, la condición (1), queda

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = |x+p| \tag{2}$$

desarrollando (elevando al cuadrado y ordenando):

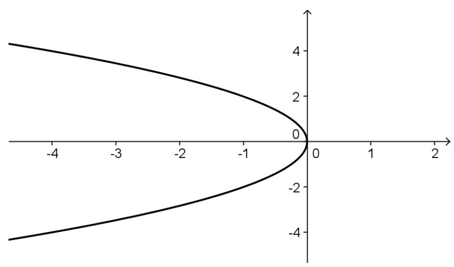
$$y^2 = 4px \tag{3}$$

3. Elementos asociados a una elipse

- *Foco*: es el punto dado (y fijo), en este caso, $F(p,0)$.
- *Directriz*: es la recta dada L, en este caso, $x=-p$.
- *Eje*: Es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz (en este caso, el eje X).
- *Vértice*: Es el punto medio del segmento AF (en este caso, el origen del sistema).
- *Lado recto*: Es el segmento perpendicular al eje, que une dos puntos de la parábola y que pasa por su foco.

Notas:

1. La longitud del lado recto de (3) es $4p$.
2. En el caso recién estudiado se ha supuesto $p>0$. Cuando $p<0$ la parábola *se abre hacia la izquierda.*



Gráfica de $y^2 = -4x$

3. Si el eje focal de la parábola coincide con el eje Y, de manera que el foco sea $(0,p)$, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4py \tag{4}$$

4. Ejemplo

Una parábola cuyo vértice esta en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4,-2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

5. Parábola con centro (h,k) y eje paralelo a un eje coordenado

- La ecuación de la parábola de centro en el punto (h,k) y eje paralelo al eje X , esta dada por

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \tag{5}$$

siendo p la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice. Si $p>0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p<0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

- La ecuación de la parábola de centro en el punto (h, k) y eje es paralelo al eje Y, la ecuación es
$$(x - k)^2 = 4p(y - h) \tag{6}$$
Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo.
- Desarrollando la ecuación (5) se obtiene la ecuación
$$y^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \tag{7}$$
¿Bajo que condiciones (5) representa una parábola?.
- Al desarrollar (6) se obtiene la ecuación
$$x^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \tag{8}$$

6. Ejemplo

Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola. Obtener su gráfico.

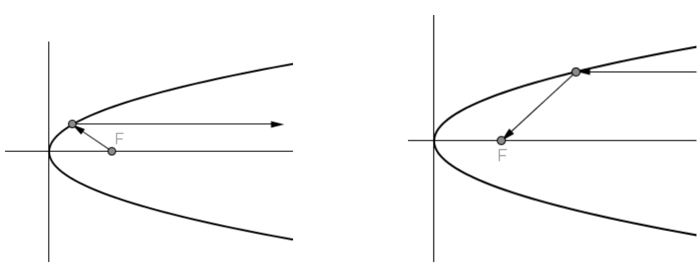
7. Parabolas y rectas tangentes

1. Sea (x_0, y_0) es un punto en la parábola (3). La ecuación de la recta tangente a la elipse en este punto es
$$y_0 y = 2p(x + x_1) \tag{9}$$
2. Las rectas tangentes a la parábola (3) de pendientes m son:
$$y = mx + \frac{p}{m}, \quad m \neq 0. \tag{10}$$
3. Tangentes trazadas desde un punto exterior a la elipse.
Actividad: Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde punto $(2, -4)$ a la parábola $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$.

8. Aplicaciones

8.1. Propiedad óptica

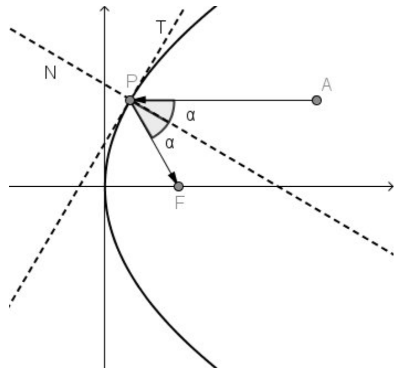
Se considera un espejo que tenga forma de parábola. Si un rayo de luz parte de su foco choca contra el espejo y se refleja siguiendo una dirección paralela a su eje. Del mismo modo un rayo de luz paralelo a su eje se refleja hacia su foco. Por esta razón, por ejemplo, los focos de los vehículos tienen forma parabólica.



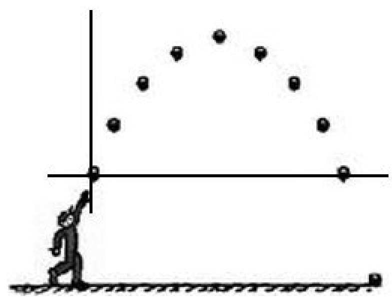
Esta propiedad de la parábola proviene del siguiente:

8.2. Teorema

La normal a la parábola en un punto $P(x_0, y_0)$ cualquiera de la parábola forma ángulos iguales con el radio vector de P_0 (segmento P_0F) y la recta que pasa por P_0 y es paralela a1 eje de la parábola.



8.3. Lanzamiento de proyectiles (movimientos parabólicos)



Al lanzar un proyectil (piedra, balón, etc.) con velocidad inicial v_0 en una dirección que forma un ángulo α con la horizontal, el proyectil describe una parábola. Asumiendo que el proyectil es lanzado desde el origen de coordenadas, la ecuación de su trayectoria es

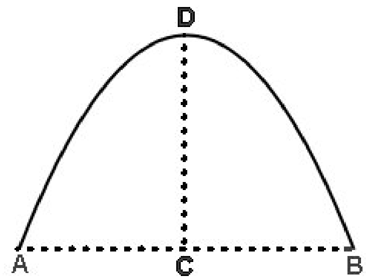
$$y = (\tan\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2, \tag{11}$$

donde g es la aceleración de gravedad, cuyo valor es $\approx 9{,}8 \mathrm{m}/s^2$.

8.4. Arco parabólico

Iglesia de Chillán

De las diversas formas de arcos usadas en construcción, una tiene la forma de un *arco parabólico*. La longitud de su base (AB en la siguiente figura) recibe el nombre de *claro* o *luz* (o *claro de luz*) del arco y la altura máxima a sobre la base *altura* del arco (CD).



Arco parabólico

9. Actividades

1. Para cada una de las siguientes parábolas, encontrar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.

   a) $y^2 = 12x$ b) $x^2 = 12y$ c) $y^2 + 8x = 0$ d) $x^2 + 2y = 0$

   Sol. a) $(3, 0)$, $x = -3$, 12. b) $(0, 3)$, $y = -3$, 12. c) $(-2, 0)$, $x = 2$, 8.

2. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto $(0, -3)$. *Sol.* $x^2 = -12y$.

3. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto $(-2, 4)$. Hallar su ecuación, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto.
   Sol. $y^2 = -8x$, $(-2, 0)$, $x = 2$, 8.

4. Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta $x - 2y + 3 = 0$. Hallar su longitud.
   Sol. $4\sqrt{5}$.

5. De un punto cualquiera de una parábola se traza una perpendicular al eje. Demostrar que esta perpendicular es media proporcional entre el lado recto y la porción del eje comprendida entre el vértice y el pie de la perpendicular.

6. Una circunferencia cuyo centro es el punto $(4, -1)$ pasa por el foco de la parábola $x^2 + 16y = 0$. Verificar que es tangente a la directriz de la parábola.

7. Encontrar la ecuación de la parábola que tiene foco $(-1, 1)$ y directriz la recta $x + y - 5 = 0$. Graficar.
   Sol. $x^2 - 2xy + y^2 + 14x + 6y - 21 = 0$.

8. Hallar la ecuación de la parábola cuyos vértice y foco son los puntos $(-4, 3)$ y $(-1, 3)$, respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y su eje. *Sol.* $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$, $x = -7$, $y = 3$.

9. La directriz de una parábola es la recta $y = 1$, y su foco es el punto $(4, -3)$. Hallar la ecuación de esta parábola por dos métodos diferentes. *Sol.* $(x - 4)^2 = -8(y + 1)$.

10. Expresar las ecuaciones de las siguientes parábolas en base a los formatos (5) o (6) y hallar las coordenadas del vértice y del foco, las ecuaciones de la directriz y eje, y la longitud del lado recto.

    a) $4y^2 - 48x - 20y = 71$ b) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

    Sol. a) $(y - \frac{5}{2})^2 = 12(x + 2)$, $(-2, \frac{5}{2})$, $(1, \frac{5}{2})$, $x = -5$, $y = \frac{5}{2}$, 12. b) $(x + \frac{4}{3})^2 = -8y$, $(-\frac{4}{3}, 0)$, $(-\frac{4}{3}, -2)$, $y = 2$, $x = -\frac{4}{3}$, 8.

11. La ecuación de una familia de parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los dos puntos $(2, 8)$ y $(-1, 5)$. *Sol.* $y = 3x^2 - 2x$.

12. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo a1 eje X y que pasa por los tres puntos (0,0), $(8. -4)$ y (3,1). *Sol.* $y^2 - x + 2y = 0$.

13. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del centro de una circunferencia que es siempre tangente a la recta $y = 1$ y a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. *Sol.* $x^2 - 4y - 4 = 0$, $x^2 + 8y - 16 = 0$.

14. Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la parábola $y^2 - 4x = 0$ en su punto $(1, 2)$. *Sol.* $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

15. Hallar la ecuación de la tangente de pendiente -1 a la parábola $y^2 - 8x = 0$. *Sol.* $x + y + 2 = 0$.

16. Del punto $(-1, -1)$, se trazan dos tangentes a las parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. Hallar el ángulo agudo formado por estas rectas. *Sol.* $\approx 36°2'$.

17. Con referencia a la parábola $y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$, hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $x + 2y + k = 0$:

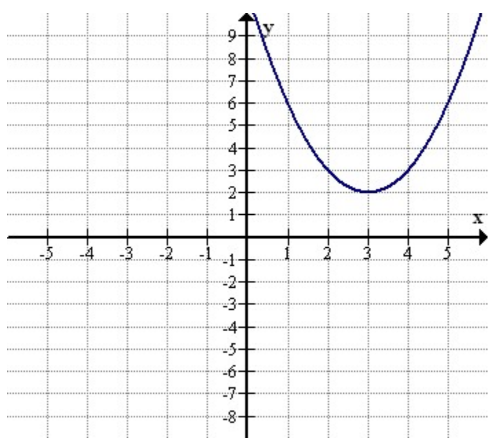
    a) cortan a la parábola en dos puntos diferentes

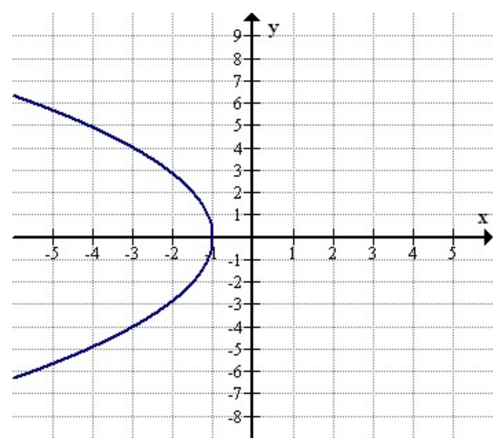
    b) son tangentes a la parábola

    c) no cortan a la parábola.

    Sol. a) $k < 8$, b) $k = 8$, c) $k > 8$

18. Determinar las ecuaciones de las siguientes parábolas:





    Sol. $x^2 - 6x - y + 11 = 0$, $y^2 + 8x + 8 = 0$

19. Se patea un balón de fútbol con un ángulo de 37° con una velocidad de 20m/s.

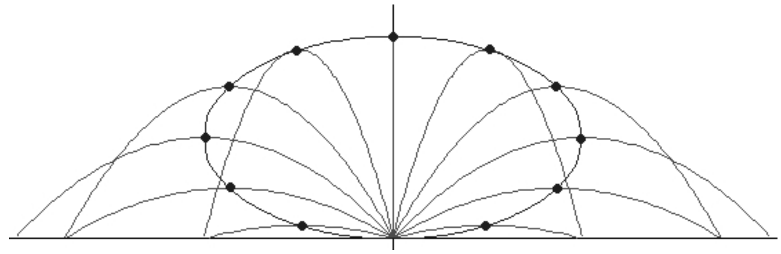
    a) Determinar la ecuación de la trayectoria de la pelota

    b) ¿A que distancia del lugar del lanzamiento cae la pelota?

20. Determinar la ecuación del arco parabólico cuyo claro de luz es de 12m y cuya altura es de 6m.

21. Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de 150 metros y la depresión de 20 metros.

22. A partir de la definición de la parábola obtener su gráfico en el software Geogebra.



1. Definición

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos es constante. Más claramente:

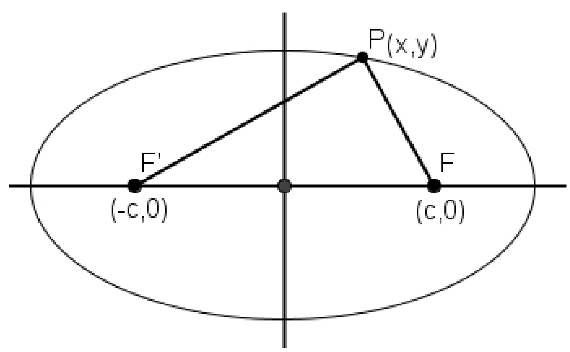
Dados (elementos bases de la elipse)

- *Dos puntos F y F' del plano, denominados* focos *de la elipse.*
- *Un número positivo, α, mayor que $d(F, F')$.*

se llama **elipse** *al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias del punto P a los puntos dados F y F' es constante e igual a α, es decir,*

$$d(P, F) + d(P, F') = \alpha \tag{1}$$

2. Deducción de la ecuación de la elipse



Para obtener la ecuación más simple de la elipse:

- se toma el eje X pasando por los puntos F' y F y el origen en el punto medio del segmento $F'F$.
- se asignan las coordenadas: $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$.
- se define $\alpha = 2a$, de donde $a > c$ (¿por qué?).

Luego, la condición (1), queda

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{2}$$

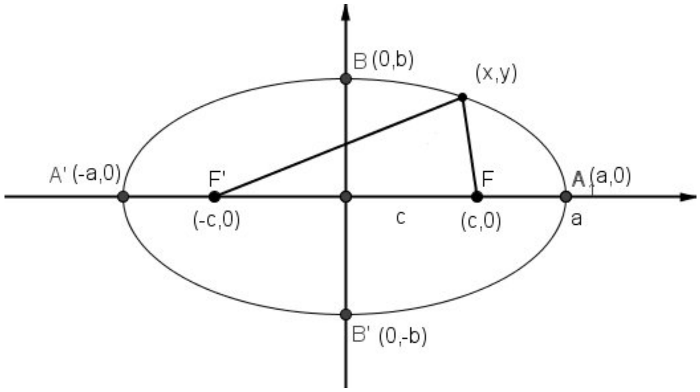
desarrollando (elevando al cuadrado dos veces) y ordenando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{3}$$

definiendo $a^2 - c^2 = b^2$, sustituyendo y finalmente dividiendo por a^2b^2, se obtiene la llamada *ecuación canónica y reducida de la elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

3. Elementos asociados a una elipse



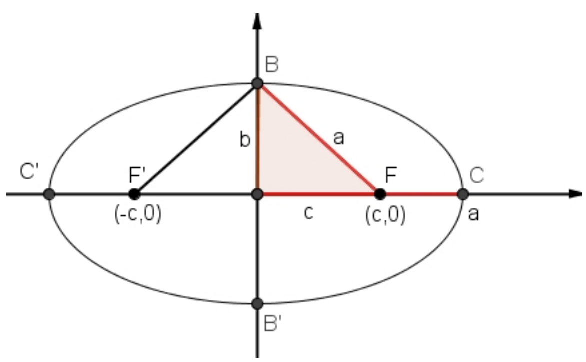
Elementos asociados a la elipse

- *Focos*: son los puntos dados (y fijos) $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$.
- *Eje focal*: Es la recta que pasa por los focos (en este caso, el eje X).
- *Eje secundario*: Es la simetral del segmento $F'F$ (en este caso, el eje Y).
- *Centro*: Es el punto de intersección de los ejes (en este caso, el origen).
- *Radios vectores*: Son los segmentos PF' y PF. del segmento $F'F$.
- *Vértices*: Son los puntos de intersección de la elipse con sus ejes (en este caso, los puntos A, A', B y B').
- *Eje mayor*: es el segmento AA' de longitud $2a$.
- *Eje menor*: es el segmento BB' de longitud $2b$.

Nota: Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que los coordenadas de los focos sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \tag{5}$$

4. Relaciones entre los parámetros de la elipse



- Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, y a , b y c están ligados por la relación $b^2+c^2=a^2$.
- $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, se llama *excentricidad* de la elipse. Notar que $e<1$.

5. Ejemplo

Los vértices de una elipse son los puntos $A(0,5)$ y $A'(0,-5)$ y sus focos son los puntos $F(0,3)$ y $F'(0,-3)$. Encontrar la ecuación de la elipse, la longitud de su eje mayor y su excentricidad. Graficar.

6. Elipse con centro (h,k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

- La ecuación de la hipérbola de centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X , esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

- Si el eje focal es paralelo al eje Y, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \tag{7}$$

- Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligadas por la relación $a^2 = b^2 + c^2$.

- Desarrollando las ecuaciones (6) y (7) se obtiene que la *ecuación general de la elipse* (con ejes paralelos al los ejes coordenados) es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{8}$$

con A y B sean del mismo signo. ¿Bajo que condiciones (8) representa una elipse?.

7. Elipses y rectas tangentes

1. Sea (x_0, y_0) es un punto en la elipse (4). La ecuación de la recta tangente a la elipse en este punto es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \tag{9}$$

2. Las rectas tangentes a la elipse (4) de pendientes m son:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \tag{10}$$

8. Perímetro y área interior de una elipse

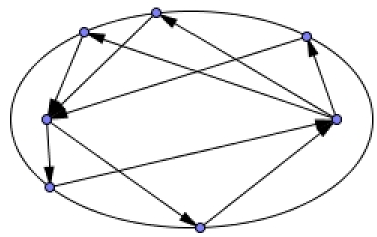
Siendo a y b los semi ejes de una elipse:

- Area de la superficie interior a la elipse $= \pi ab$
- Perímetro $\approx \pi \left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right)$ (aproximación de Ramanujan)

9. Aplicaciones

9.1. Propiedad óptica

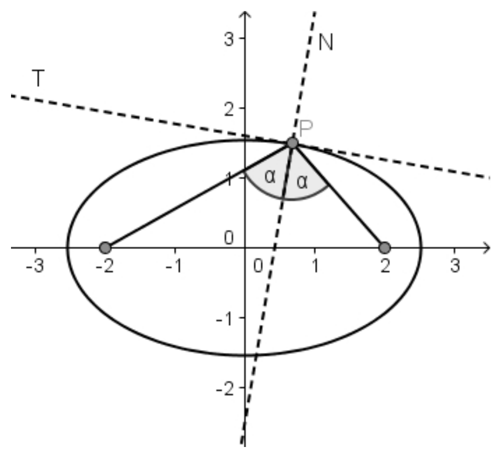
Se considera un espejo que tenga forma de elipse. Si un rayo de luz parte de uno de los focos choca contra el espejo, se reflejará hacia el otro foco.



Esta propiedad de la elipse proviene del siguiente:

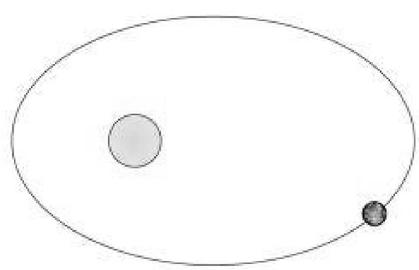
9.1.1. Teorema

La normal a la elipse en un punto P cualquiera de ella forma ángulos iguales con el radios vectores de ese punto: PF y PF'.



9.2. Astronomía

Los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol (Primera Ley de Kepler).



10. Actividades

1. Verificar que la circunferencia es un caso particular de una elipse. ¿Cuál sería su excentricidad?.
2. ¿Toda ecuación del tipo (8) representa una elipse?. Explicar.
3. Hallar los valores del semieje menor, semi eje mayor, la excentricidad, coordenadas de los focos y centro de las elipses

a) $9x^2 + 16y^2 = 576$ b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$ c) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$.

Sol. a) $a = 8$, $b = 6$, $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$, $(\pm 2\sqrt{7}, 0)$, $(0, 0)$. b) $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $(0, \pm 2)$, $(0, 0)$.
c) La ec. canónica es $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$, luego $a = 6$, $b = 4$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $(6 \pm 2\sqrt{5}, -4)$, $(6, -4)$.

4. Hallar las ecuaciones de las siguientes elipses de manera que satisfagan las condiciones que se indican.

   a) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$.
   b) Focos $(0, \pm 6)$, semieje menor $= 8$.
   c) Focos $(\pm 5, 0)$, excentricidad $= \frac{5}{8}$.

   Sol: a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$. c) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.

5. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto $(2, 1)$ de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$. *Sol.* 3 y 3.

6. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(-3, 3)$. *Sol.* $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$.

7. Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes parábolas en los puntos indicados:
   a) $2x^2 + 3y^2 = 5$, $(1, -1)$. b) $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$, $(2, 1)$.
   Sol. a) $2x - 3y - 5 = 0$. b) $9x + 5y - 23 = 0$

8. Por el punto $(2, 7)$ se trazan las tangentes a la elipse $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$. Encontrar los puntos de contacto. *Sol.* $(1, 1)$, $(-\frac{13}{9}, \frac{29}{9})$.

9. Determinar los puntos de intersección (en caso que los haya) de la recta $x + 3y = 3$ y la elipse $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{25} = 1$. *Sol.* $(6, -3)$ y $(-0, 4)$.

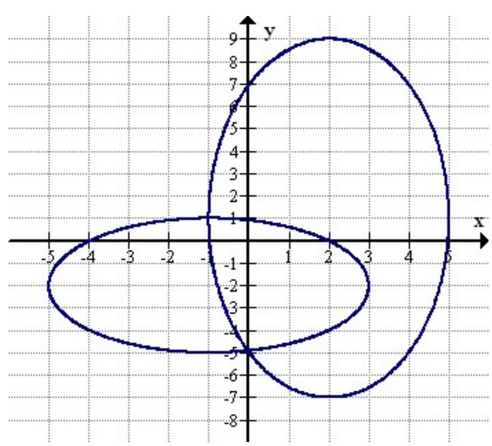
10. Hallar el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a los puntos fijos $(2, -3)$ y $(2, 7)$ sea igual a 12. *Sol.* $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$.

11. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo $(3, 2)$ sea la mitad de la correspondiente a la recta $x + 2 = 0$. *Sol.* $3x^2 + 4y^2 - 28x16y + 48 = 0$.

12. Determinar la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de dos rectas tangentes cualesquiera a la elipse (4). *Sol*: Circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

13. Considerar las recta $x + y + 1 = 0$ y la elipse $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$. Verificar que uno de sus puntos de intersección es $(2, -3)$. ¿Cuál es el otro?. *Sol.* $(-\frac{6}{5}, -3)$.

14. Para las siguientes elipses:



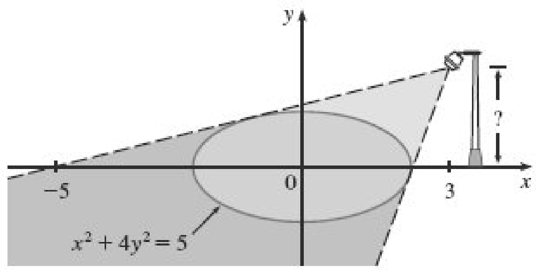
se pide:

a) Encontrar sus *ecuaciones generales*.

b) Determinar algebraicamente sus puntos de intersección. Comprobar gráficamente su respuesta.

Sol. a) $y^2 + 8x + 8 = 0$, $x^2 - 6x - y + 11 = 0$

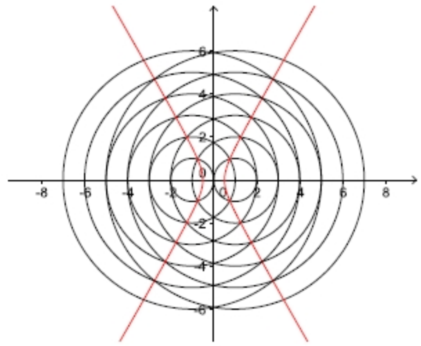
15. La siguiente figura muestra una lámpara localizada a 3 unidades a la derecha del eje Y y la sombra elíptica que generada (en el suelo) $x^2 + 4y^2 \leq 5$. ¿A qué distancia del eje X se encuentra la lámpara?. *Sol.* 2 unidades.



16. Para la trayectoria elíptica de nuestro planeta, el semieje mayor vale 149600000km. y la excentricidad $e = 0,0167$. Encontrar: Eje mayor, distancia focal, la mínima distancia de la tierra al sol y la máxima distancia de la tierra al sol. *Sol*: Eje mayor 299200000km, distancia focal 5086400km, mínima distancia 147056800km, máxima distancia 152143200km.

17. Se traza el contorno de un terreno elíptico colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16 metros y colocando un cordel de 36 metros de longitud total alrededor de ellas, se traza el contorno empleando una tercera estaca que se gira alrededor de las dos fijas, manteniendo el lazo en tensión. Calcular la longitud, ancho, área y perímetro del terreno trazado.

18. Investigar e implementar, usando Geogebra, el *método del jardinero* para graficar una elipse.



1. Definición

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante. Más claramente:

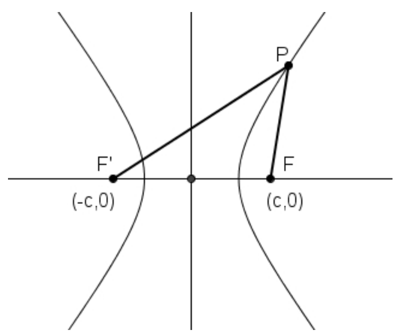
Dados (elementos bases de la hipérbola)

- *Dos puntos F y F' del plano, denominados* focos *de la hipérbola.*
- *Un número positivo, α, menor que $d(F, F')$.*

se llama hipérbola *al lugar geométrico de los puntos del plano cuyo valor absoluto de la* diferencia *de las distancias del punto P a los puntos dados F y F' es constante e igual a α, es decir,*

$$|d(P, F) - d(P, F')| = \alpha \tag{1}$$

2. Deducción de la ecuación de la hipérbola



Para obtener la ecuación más simple de la hipérbola:

- se toma el eje X pasando por los puntos F' y F y el origen en el punto medio del segmento $F'F$.
- se asignan las coordenadas: $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$.
- se define $\alpha = 2a$, de donde $a < c$ (¿por qué?).

Luego, la condición (1), queda

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \tag{2}$$

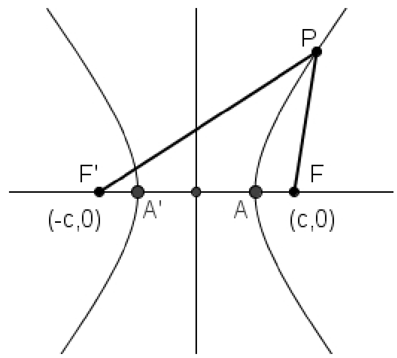
elevando al cuadrado y trabajando de manera similar al caso de la elipse, se obtiene

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \tag{3}$$

definiendo $c^2 - a^2 = b^2$, sustituyendo y finalmente dividiendo por a^2b^2, se obtiene la llamada *ecuación canónica y reducida de la hipérbola*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

3. Elementos asociados a una hipérbola



- *Focos*: son los puntos dados (y fijos) $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$.
- *Eje focal*: Es la recta que pasa por los focos (en este caso, el eje X).
- *Centro*: Es el punto de intersección de los ejes (en este caso, el origen).
- *Radios vectores*: Son los segmentos PF' y PF. del segmento $F'F$.
- *Vértices*: Son los puntos de intersección de la hipérbola con su eje focal: A y A'.
- *Eje mayor*: es el segmento AA' de longitud $2a$.

Nota: Si el eje focal de la hipérbola coincide con el eje Y, de manera que los coordenadas de los focos sean $(0,c)$ y $(0,-c)$, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

4. Relaciones entre los parámetros de la hipérbola

- Para cada hipérbola, sus parámetros a , b y c están ligados por la relación $c^2 - a^2 = b^2$.
- $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, se llama *excentricidad* de la hipérbola. Notar que $e > 1$.

5. Ejemplo

Los vértices de una hipérbola son los puntos $A(0,3)$ y $A'(0,-3)$ y sus focos son los puntos $F(0,5)$ y $F'(0,-5)$. Encontrar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su eje mayor y su excentricidad. Graficar.

6. Asíntotas de la hipérbola

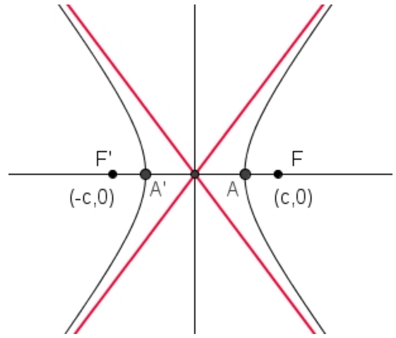
1. De (4), se obtiene que

$$y = \pm\frac{b}{a}x\,\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \tag{6}$$

2. Por una cuidadosa inspección de (4), se deduce que, a medida que x *crece (o decrece) sin límite*, la ecuación precedente se va *transformando* en las ecuaciones de las rectas

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{7}$$

Por lo tanto, a medida que x *crece (o decrece) sin límite* los puntos de la hipérbola (4) se van acercando, cada vez más, a las rectas (7). Luego, estas dos rectas son asíntotas de la hipérbola (4).



Asíntotas de la hipérbola

7. Hipérbola con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

- La ecuación de la hipérbola de centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X , esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

siendo

$$\frac{x-h}{a} = \pm\frac{y-k}{b} \tag{9}$$

las ecuaciones de sus asíntotas.

- Si el eje focal es paralelo al eje Y, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{10}$$

siendo

$$\frac{y-k}{a} = \pm\frac{x-k}{b} \tag{11}$$

las ecuaciones de sus asíntotas.

- Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje mayor, c es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligadas por la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

- Desarrollando las ecuaciones (7) y (10) se obtiene que la *ecuación general de la hipérbola* (con ejes paralelos al los ejes coordenados) es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{12}$$

con A y B sean de *distinto signo*. ¿Bajo que condiciones (12) representa una hipérbola?.

8. Ejemplo

Verificar que la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ es una hipérbola. Determinar su centro, eje focal, vértices, focos, excentricidad y ecuaciones de sus asíntotas. Hacer un esbozo de su gráfico.

9. Hipérbola y rectas tangentes

1. Sea (x_0, y_0) es un punto en la hipérbola (4). La ecuación de la recta tangente a la hipérbola en este punto es

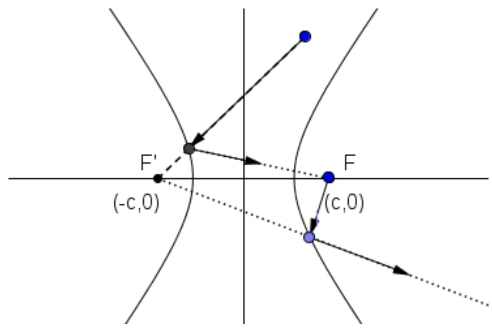
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \tag{13}$$

2. Las rectas tangentes a la hipérbola (4) de pendientes m son:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}, \text{ con } |m| > \frac{b}{a} \tag{14}$$

10. Aplicaciones

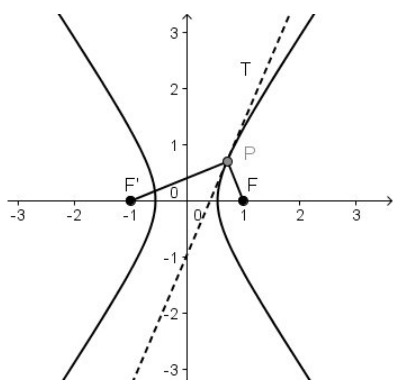
1. **Propiedad óptica**. En un espejo hiperbólico, un rayo de luz dirigido hacia uno de los focos es reflejado hacia el otro foco, y un rayo de luz que sale de un foco es reflejado, alejándose de otro foco y en la dirección del otro foco.



Esta propiedad de la hipérbola proviene del siguiente:

10.1. Teorema

La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.



2. **Astronomía**. Trayectorias de cometas.

Un cuerpo celeste que provenga del exterior del sistema solar, sea atraído por el sol y luego se aleje (sin volver), en algunos casos, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al sol y saldrá nuevamente del sistema solar. Esto sucede con algunos cometas.

11. Actividades

1. Hallar los vértices, focos y excentricidad de las siguientes hipérbolas. Graficar.

a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $4x^2 - 9y^2 = 36$ c) $9y^2 - 4x^2 = 36$

Sol. a) $(\pm 2, 0)$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$. b) $(\pm 3, 0)$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $\frac{\sqrt{13}}{3}$. c) $(0, \pm 2)$, $(0, \pm\sqrt{13})$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

2. Se llama *lado recto* de la hipérbola al segmento que pasa por un foco y une dos puntos de dicha hipérbola. Verificar que la longitud el lado recto de la hipérbola (4) viene dada por $\frac{2b^2}{a}$. Encontrar las longitudes de los lados rectos de las hipérbolas de la actividad precedente. *Sol.* 9, $\frac{8}{3}$, 9.

3. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(\pm 2, 0)$ y sus focos son los puntos $(\pm 3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad. *Sol.* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, 1.5.

4. Los vértices de una hipérbola son $(0, \pm 4)$ y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos. *Sol.* $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$, $(0, \pm 6)$.

5. ¿Qué tienen en común la familia de hipérbolas $3x^2 - 3y^2 = k$?

6. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de au distancia de la recta $2x - 3 = 0$. *Sol.* $3x^2 - y^2 = 27$.

7. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$. *Sol.* $2x \pm \sqrt{5} = 0$

8. Se llama *hipérbola equilátera* una hipérbola de la forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{15}$$

   a) Comprobar que la excentricidad de una hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

   b) Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

9. Los vertices de una hipérbola son los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, y su excentricidad es 5. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de cada lado recto. *Sol.* $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$. $(4, 3)$, $(-2, 3)$. 5.

10. Para cada una de las siguientes ecuaciones, para las correspondientes a hipérbolas: escribirlas en las forma (7) o (10), determinar las coordenadas del centro, vertices y focos; su excentricidad y las ecuaciones de sus asíntotas.

    a) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$ b) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ c) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

    Sol. a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$. Centro $(2, 2)$. Vértices $(5, 2)$ y $(-1, 2)$. Focos $(2 \pm \sqrt{10}, 2)$. Excentricidad $\frac{\sqrt{10}}{3}$. Asíntotas $x + 3y - 8 = 0$, $x - 3y + 4 = 0$. c) No es una hipérbola. Son dos rectas concurrentes: $x \pm 2y - 1 = 0$.

11. Hallar el ángulo agudo de intersección de las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$. *Sol.* $36°52'$.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$ que son paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$. *Sol.* $x - y \pm 1 = 0$.

13. Dibujar las siguientes hipérbolas y hallar sus puntos de intersección: $x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$ y $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$. *Sol.* $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(-2, 1)$, $(-2, 3)$.

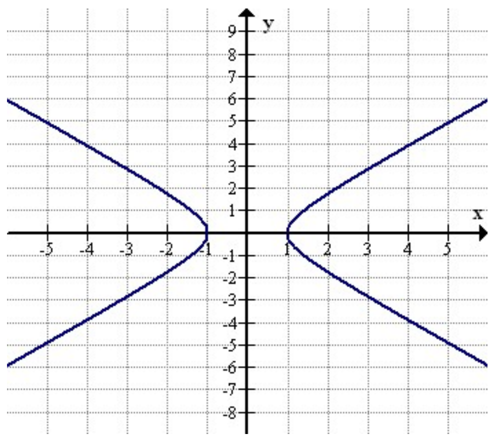
14. Verificar gráficamente que la curva $xy = 1$ corresponde a una hipérbola.

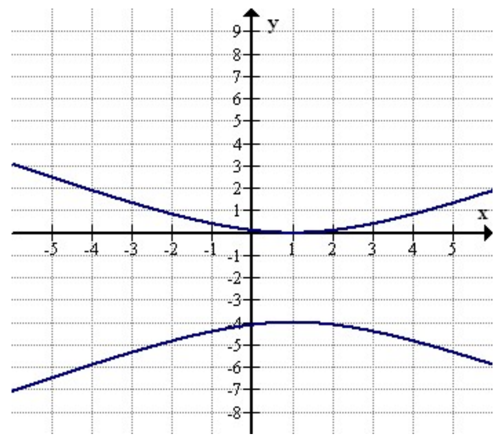
15. Comprobar que la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ y la hipérbola $3x^2 - 4y^2 = 12$ tienen los mismos focos y que se cortan en ángulo recto.

16. Calcular los ángulos bajo los cuales se cortan la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$. *Sol.* $\approx 83{,}62°$.

17. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. *Sol.* $(2{,}35, 1{,}86)$, $(-2{,}35, 1{,}86)$, $(2{,}35, -1{,}86)$, $(-2{,}35, -1{,}86)$ (valores redondeados a dos decimales).

18. Determinar las ecuaciones de las siguientes hipérbolas:





Sol. $x^2 - y^2 = 1$, $4x^2 - 8x - 9y^2 - 36y + 4 = 0$

19. A partir de la definición de la hipérbola obtener su gráfico en el software Geogebra.

Referencias

[1] **Efimov, N.**, *Curso breve de Geometría Análitica.*, Editorial MIR.

[2] **González, P.** & **del Pino, C.**, *Apuntes de Matemática*, U. de Talca.

[3] **Kindle, J.**, *Geometría Analítica*, Mc-Graw Hill.

[4] **Lehmann, C.**, *Geometría Analítica*, Limusa.

[5] **Rodríguez, A.**, *Apuntes de Cálculo*, U. de Talca.

[6] **Wooton, W.**, *Geometría Análtica Moderna* et al, Publicaciones Cultural., S.A.