Divulgaciones Matemáticas v. 5, No. 1/2 (1997), 61–76

Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral

Troubles Understanding the Concept of Integral: an Explanation

José Luis Llorens Fuster y Francisco José Santonja Gómez
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad Politécnica de Valencia.
Valencia. España.

Resumen

La mayoría de los estudiantes universitarios de carreras técnicas o científicas manifiestan deficiencias importantes en el aprendizaje del concepto de integral que, para ellos, se identifica con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow. Una revisión de los programas habituales junto con una utilización oportuna de los recursos técnicos actuales puede mejorar sensiblemente esta situación.
Palabras y frases clave: integral, área, Vinner, visualización, DERIVE.

Abstract

The most part of the undergraduate students in scientific or engineering careers have serious difficulties learning the concept of integral, which they identify with the calculus of primitives and the indiscriminated aplication of Barrow's rule. A revision of the usual programs together with an appropiate use of recent technical resources may improve considerably this situation.
Key words and phrases: integration, area, Vinner, visualization, DERIVE.

1 Introducción: Una descripción de los problemas

Uno de los aspectos que debe ser cubierto por la investigación en didáctica de las Matemáticas es el análisis de las deficiencias que detectamos en los conocimientos de los estudiantes. Así, entre los profesores universitarios que impartimos asignaturas con contenidos de Análisis Matemático en los primeros cursos de carreras científicas o técnicas, es casi general el convencimiento de que en el aprendizaje del concepto de integral existen deficiencias fácilmente detectables. Naturalmente, ese trabajo de investigación no debe detenerse en la mera descripción de los problemas sino que, como resultado del análisis de su origen, debe desembocar en propuestas que contribuyan a superarlos o, al menos, a que la mayoría de los estudiantes los superen. Recurriendo a la propia experiencia o a lo que se ha puesto de manifiesto en otros estudios (cfr. [4], [5], [8]) podemos resumir esas deficiencias como sigue:

a) *Generalmente, los estudiantes identifican "integral" con "primitiva".* La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico. Es, por tanto, un proceso puramente algebraico, más o menos complicado y, siempre, *autocontenido*, de modo que un estudiante puede conocer distintos métodos de integración e, incluso, saber aplicarlos con cierta soltura (integrales por partes, de funciones racionales, trigonométricas, etc.) y, al mismo tiempo, no ser capaz de aplicarlos al cálculo de un área o ignorar por completo qué son las sumas de Riemann, etc.

b) *Las integrales "definidas" se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no pueda aplicarse.* Es decir, el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

representa sólo *un paso más* del cálculo de primitivas, la aplicación de la regla de Barrow. Ello explica comportamientos como el relatado en el citado trabajo de Mundy ([4]), en el que un porcentaje considerable de los 973 estudiantes objeto de su estudio (que habían superado el primer año de Cálculo) no supo contestar correctamente a la pregunta siguiente: *"¿Por qué*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{-1}^{1} = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$$

es incorrecto?"

De modo semejante, pudimos comprobar que en un examen de Cálculo en la Universidad, propuesto después de haberse tratado el tema de forma "convencional", sólo un 23% de los 198 estudiantes que se examinaron contestó correctamente que

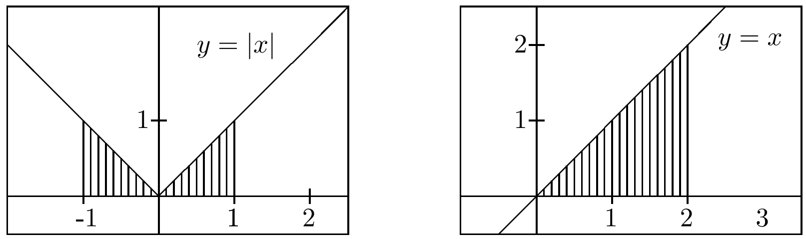
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -2$$

era "falso". El resto dejó la pregunta en blanco o dijo que la igualdad era cierta ...

Observemos que ese tipo de respuestas no se explican *sólo* porque esos estudiantes no se *sepan* la regla de Barrow, sino que aparecen como representativas de una desconexión más profunda entre el concepto de integral y su particular *imagen* de ese concepto. Otros datos nos permiten afirmar, de modo más rotundo, que ni siquiera cuando se dice expresamente "integral definida", se evoca en el estudiante ninguna relación de ese concepto con el **problema de la convergencia**, ya conocido previamente por él en temas como sucesiones, derivadas, continuidad, etc., cuando ha estudiado las integrales. Así, es fácil comprobar que cuando específicamente se estudian las integrales impropias, a la mayoría de los estudiantes le parece muy sorprendente que una integral pueda ser *divergente*.

c) *No se integra el concepto de área con el de integral.* Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente *algebraica* de la integral. En efecto, las respuestas equivocadas de los ejemplos anteriores no sólo indican que el estudiante no se ha percatado de que la función es discontinua en $x = 0$, sino que, claramente, no tiene una *imagen visual* del problema: Ni de la función (siempre positiva) ni de la propia integral entendida como área. De hecho, es muy frecuente que esa *interpretación* de la integral como área sólo se utilice cuando expresamente se pida en ejercicios que típicamente empiezan con el enunciado *"Calcular el área encerrada por la gráfica de ...* ", pero casi nunca *espontáneamente*.

Esa falta de integración se manifiesta también en *sentido contrario*. Así, en un examen propusimos que se obtuviera el valor del área sombreada en cada una de las figuras siguientes:



La mayoría de las respuestas iniciales fueron $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$ y $\int_{0}^{2} x\, dx$, respectivamente. En el primer caso, por la dificultad añadida que significa la presencia del módulo, muy frecuentemente pudimos encontrar además soluciones finales absurdas o incompletas, resultado coherente con el mencionado trabajo de Mundy (1984), en el que nada menos que un 95% de los estudiantes contestó incorrectamente a la pregunta

$$\int_{-3}^{3} |x+2|\, dx$$

de modo que nos reafirmamos en el diagnóstico señalado, ya que el alumno está *prefiriendo* el contexto algebraico-formal al visual-geométrico sencillamente porque no los ha integrado. No hace falta señalar que, al mismo tiempo, estos estudiantes considerarían una trivialidad que se les pidiera calcular el área de un cuadrado cuyo lado mide 1 metro o la de un triángulo rectángulo como los que aparecen en las gráficas anteriores.

2 Análisis curricular

Como ya hemos indicado, estamos refiriéndonos a estudiantes universitarios de un primer curso de una carrera científica o técnica (18 años o más). De acuerdo con el plan de estudios de España, semejante al de muchos otros países, el concepto de integral se introduce al menos dos años antes del ingreso en la Universidad, de modo que los estudiantes inician esas carreras tras haber superado al menos dos asignaturas con bastantes contenidos de Cálculo diferencial e integral (límites de sucesiones y de funciones, continuidad, derivabilidad, fórmula de Taylor y, por supuesto, cálculo integral y sus aplicaciones). Una revisión de los libros de texto de esos niveles pre-universitarios (de los que omitimos las referencias concretas para no sobrecargar ese apartado) puede darnos una pista sobre el origen de estos conflictos.

En primer lugar, podemos comprobar que la secuencia de contenidos en el apartado de *Cálculo Integral* es siempre la misma, en el orden que señalamos:

- Cálculo de primitivas.
- Métodos de integración.
- La integral definida. Regla de Barrow.
- Aplicaciones de la integración: Cálculo de áreas y volúmenes.

Además, la insistencia relativa que se hace en cada uno de esos epígrafes suele ser bien diferente, llevándose la palma —con mucho— los dos primeros. Sin que entremos ahora a discutir la cuestión, es evidente que ello responde a que el objetivo que se persigue es *adiestrar* a los estudiantes en el cálculo de primitivas y ello a base de repetir muchos ejercicios, exigiendo un considerable y progresivo nivel de destreza, por lo que se facilitan, incluso, *"trucos y recetas"* (sic) que contribuyan a ser más eficaces en la obtención del resultado, casi a costa de lo que sea (incluyendo, en no pocas ocasiones, el sacrificio del rigor). Por ejemplo, no es raro encontrar frases como la que sigue, extraída de uno de esos libros de texto: *"(...) la integración se hace utilizando la formación de cuadrados. El truco que facilita el proceso consiste en multiplicar numerador y denominador por 4a (...)"*.

En segundo lugar, podemos señalar que la gran mayoría de los textos sigue abusando del *formalismo* cuando se refieren al *concepto* de integral. A pesar de la relativa mejora que, todo hay que decirlo, parece apreciarse en los textos más recientes, también hay que constatar que algunos sencillamente *omiten* esta cuestión. En otros, podemos encontrar descripciones como la siguiente:

"(...) se llama suma superior de la función f asociada a la partición P, y se designa por $S(f, P)$, al siguiente número real:

$$S(f,P) = (x_1 - x_0)M_1 + (x_2 - x_1)M_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})M_n =$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i}$$

Se llama suma inferior de f asociada a la partición P, y se designa por $I(f, P)$ al siguiente número real:

$$I(f,P) = (x_1 - x_0)m_1 + (x_2 - x_1)m_2 + \cdots + (x_n - x_{n-1})m_n =$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i}$$

Si $P_1,\ P_2, \ldots, P_n, \ldots$ *es una sucesión de particiones de* $[a, b]$ *tales que:*

$$P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n \subset \cdots$$

se obtiene entonces una sucesión de intervalos encajados que determina un número real. Este número real es, por definición, el área del trapecio mixtilíneo determinado por la función f y por los puntos a y b. Se puede escribir, por tanto:

$$\acute{a}rea\ R(f, a, b) = lim_n\ S(f, P_n) = lim_n\ I(f, P_n)\text{''}.$$

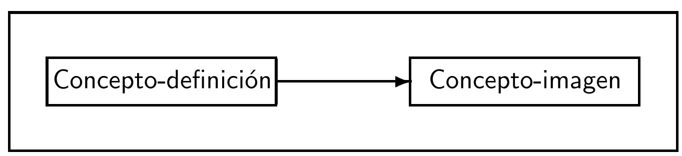
Resaltemos que la cita anterior está extraída de un texto de *secundaria*, al final de los temas dedicados al Cálculo Integral, cuando el alumno ya lleva varias docenas de integrales resueltas. De modo que es fácil comprender que poco o ningún efecto tendrán esas páginas para ayudar a comprender el concepto. Indiquemos, además, que los alumnos de estos niveles no estudian las series numéricas (se introducen en la Universidad).

Finalmente, podemos constatar también que en **todos** los textos se omite una revisión del concepto de *área*. Antes al contrario, se aprovecha que el área es un *"concepto intuitivo"* (sic) para **interpretar** de ese modo las integrales, dando sentido, de esa forma, a todo el engorroso cálculo de primitivas visto anteriormente. Así, la regla de Barrow o el teorema fundamental del Cálculo se presentan como una verdadera *interpretación geométrica* de la integral, de modo semejante a como la tangente se presenta como la interpretación geométrica de la derivada ... Pero no podemos dejar de insistir en el hecho de que estos alumnos han estudiado algo (lamentablemente, poco) de geometría y, en su momento (educación básica) vieron lo que era el área de algunas figuras planas y cómo obtenerla.

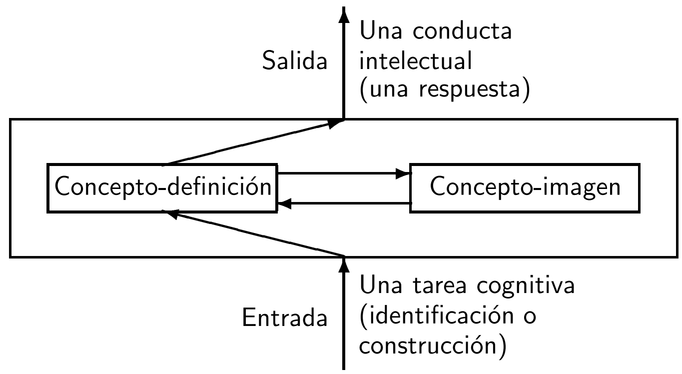
3 Imágenes conceptuales

Los tres puntos señalados en el apartado anterior sugieren, aplicando sólo el sentido común, causas más que suficientes para que se produzcan los conflictos que expusimos al principio. Nuestro trabajo se ha desarrollado con el objetivo de justificar lo que hasta ahora se presenta casi como una intuición, tanto por lo que se refiere a la *etiología* de los problemas expuestos como a las acciones de remedio sugeridas.

Como es bien sabido, hacia principios de los años ochenta, S. Vinner introdujo la terminología *concepto-imagen* y *concepto-definición* asociadas a cualquier concepto matemático. *"Concepto-imagen es la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados (...)"* y *"concepto-definición es la fórmula con palabras usadas para especificar ese concepto"* ([7], p.152). El mismo Vinner explica que el concepto-imagen se va "llenando" gradualmente, pero no necesariamente refleja todos los aspectos del concepto-definición. Sin embargo, *"lo que esperan muchos profesores de enseñanza secundaria o de universidad, es que ése sea el esquema habitual,*

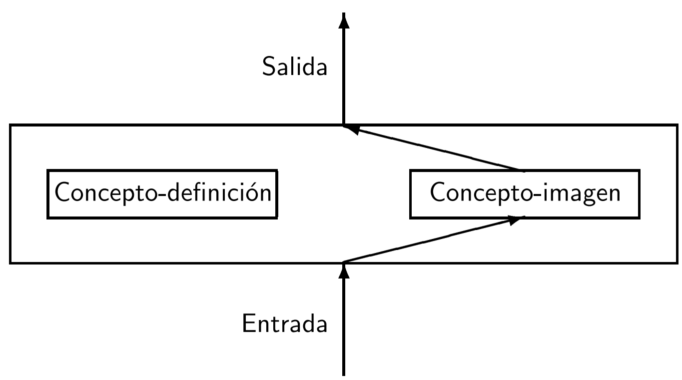


es decir, que el concepto-imagen se forme en las mentes a partir del concepto-definición y que esté completamente controlado por éste" ([9], p.71). Lo que en realidad suele ocurrir es que coexisten ambas imágenes conceptuales que, además, pueden incluir aspectos contradictorios. Esas contradicciones sólo se manifestarán cuando sean evocadas **simultáneamente**. El comportamiento deseable de complementariedad entre imagen y definición para producir una respuesta, que esquemáticamente sería el que muestra el siguiente diagrama (ibid., p. 72):



Interrelación entre definición e imagen

es reemplazado, cuando no existe una verdadera integración entre las imágenes conceptuales, por el más "natural" e "intuitivo":



Respuesta intuitiva

"Y sólo los problemas no rutinarios, en los que los conceptos-imagen incompletos se perciben como equivocados, pueden estimular a referirse al

concepto-definición. Tales problemas son raros y cuando se proponen a los estudiantes los suelen considerar improcedentes o injustos. Por tanto, no parece haber nada que tienda a cambiar los hábitos comunes de enseñanza que son, en principio, inadecuados para contextos técnicos" (Ibid., p. 73).

El conflicto entre la imagen conceptual de un concepto y la definición de dicho concepto significa, en la práctica, la ausencia de una verdadera *comprensión* del concepto, tal como se ha puesto de manifiesto en numerosos trabajos, algunos relativos también a cuestiones más o menos básicas del Análisis Matemático. Incluso, recientemente, hemos podido establecer una relación **expresa** entre esos conflictos y la imposibilidad de progresar en los *niveles de razonamiento* que postula el modelo de Van Hiele, estudiando el concepto de aproximación local ([3]). La existencia de esa relación refuerza, en definitiva, la necesidad de eliminar esos conflictos cuando se tiene como objetivo que los estudiantes *comprendan* los conceptos que manejan y, en consecuencia, puedan aplicarlos adecuadamente. En nuestro caso, las dualidades conflictivas a las que nos estamos refiriendo parece claro que se centran en dos aspectos:

En primer lugar, en el propio concepto de integral, del que, como hemos señalado, el alumno tiene una imagen equivalente al cálculo de la primitiva. No hace falta insistir en que ésta no es sólo una cuestión de *vocabulario.* Así, en los ejemplos que hemos mencionado, la respuesta "intuitiva" del estudiante responde a la existencia de esa imagen del concepto; en todo caso, tal como hemos constatado preguntándolo expresamente, la primera imagen que evoca la palabra integral se refiere a *"hallar una función de la que se sabe la derivada"* (aunque, muchas veces, la expresión usada por los estudiantes haya sido más pobre, del tipo *"aplicar todo eso de partes, sustitución, … "*; *"aplicar la fórmula de las integrales",* etc.)

La segunda dualidad a la que nos referíamos es aquella cuya imagen significa la aplicación de la regla de Barrow frente a la integral entendida como respuesta al problema del área o, si se prefiere, a su definición según el modelo de Cauchy-Riemann. Como decíamos antes, la respuesta intuitiva ante una integral *definida* es la aplicación de la regla de Barrow, con posibles errores inclusive.

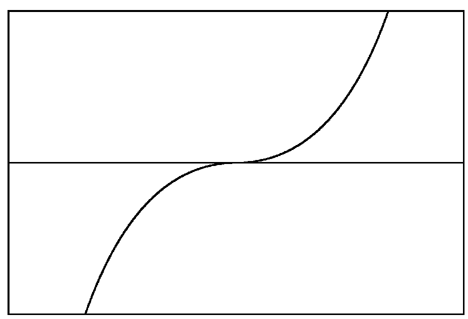
El comienzo de los problemas cabe situarlo, evidentemente, en el mismo orden de exposición de los temas relativos al cálculo integral y en la insistencia que en ellos se hace. Si al alumno se le adiestra, durante dos o tres años, en el cálculo de primitivas que, además, encabeza el estudio del cálculo integral, no podemos pretender que, después, por dedicar una escasa atención (si es que llega a hacerse) al **concepto** de integral y a sus aplicaciones, las cosas queden en su sitio. En realidad, aquí casi no cabe hablar de contradicción entre el concepto-imagen y el concepto-definición ya que el primero responde casi perfectamente al segundo. La insistencia concienzuda que se hace sobre el cálculo de las *integrales* provoca que se arraigue la idea de que eso es la integral, de modo que podríamos decir que ese concepto-imagen *no deja* sitio para una revisión posterior en la que, además, el vocabulario es confuso y las ideas que se manejan son poco o nada intuitivas (la convergencia no tiene nada de intuitiva).

En cuanto a la segunda dualidad, de acuerdo con el *modelo de Vinner* es fácil explicar que la respuesta intuitiva sea de naturaleza algebraica y que, en realidad, no se identifique (salvo de una manera forzada) área con integral. Como ya hemos indicado, el concepto de área no se revisa y el alumno ya lo conoce o cree conocerlo. Al interpretarse geométricamente la integral como área, suponiendo que este concepto es *intuitivo*, el estudiante evoca su antiguo concepto-imagen, que proviene de la enseñanza primaria, salvo que se le fuerce a otra cosa en función del contexto. En ese caso, utilizará la regla de Barrow, con más o menos rigor, incluso prefiriéndola a cualquier consideración geométrica o visual, tal como veíamos en los ejemplos. Es, pues, una de las situaciones típicas descritas por este modelo para que se generen conflictos que impidan *"la transición hacia el razonamiento matemático avanzado, cuando en la mente hay de forma simultánea conceptos-imagen basados en experiencias anteriores que interaccionan con nuevas ideas basadas en definiciones y deducciones. Esto es particularmente importante cuando hay términos en las definiciones que no han sido definidos"* ([6], p. 496).

Aquí, el "término que no ha sido definido" es, por una parte, el de **área** (que, tampoco hace falta decirlo, no tiene nada de *intuitivo*) y, por otra, el de **integral**, salvo en lo que se refiere a su "cálculo" (Barrow-primitivas). Se puede añadir que, además, se usan frecuentemente otros términos y símbolos difícilmente comprensibles para estudiantes principiantes en el Análisis, tales como sumatorios, particiones de intervalos, etc. Todo ello aparece en una presentación del concepto en el aspecto en que éste participa del problema de la convergencia, de la aproximación local, que, de este modo, queda como enmascarado. Las imágenes que perviven son, finalmente, de naturaleza algebraica.

4 Algebrización de los conceptos

Observemos que esta *algebrización* del concepto de integral es casi un fenómeno generalizado a la mayoría de los conceptos básicos del Análisis. El concepto de límite de una función o de una sucesión se *algebriza*, para reducirlo finalmente a unas cuantas "recetas" que ayudan a resolver indeterminaciones, tarea en la que el estudiante es fuertemente adiestrado y de la que es evaluado casi exclusivamente. Es posible que en las clases se dedique alguna atención al concepto, pero si en los exámenes sólo se proponen ejercicios de indeterminaciones, esos esfuerzos servirán para poco. Del mismo modo, el concepto de derivada se algebriza y, finalmente, el alumno es adiestrado (y evaluado) para que sea capaz de derivar casi cualquier cosa. Nuevamente, encontramos aquí un fuerte paralelismo con el tema que nos ocupa. Como se ha demostrado (cfr. [3]) casi todos los estudiantes que son objeto de nuestro estudio, considerarían una trivialidad que se les pidiese dar la derivada de $y = x^3$; obtener la derivada de esa función en $x = 0$ y hallar la ecuación de la recta tangente a esa "curva" en $x = 0$. Sin embargo, esos mismos estudiantes negarán **con seguridad** que la recta de la gráfica siguiente sea tangente a la curva:



(Naturalmente, hemos representado precisamente un aspecto de la gráfica de $y = x^3$ y de su tangente en $x = 0$. La eliminación de los ejes de coordenadas tiene por objeto centrar la cuestión en el hecho de que la *imagen* entre en contradicción con la "idea intuitiva" de tangencia que pueda tener el estudiante).

Una de las conquistas del Análisis Matemático es, justamente, la *algebrización* de algunos de los conceptos que maneja, particularmente de aquellos que se relacionan con el concepto de límite. Las "reglas de derivación", las propiedades que se aplican en la resolución de una indeterminación o en la obtención de la primitiva de una función, la propia regla de Barrow, etc., son manifestaciones de esa algebrización que siempre representa **el final** de un largo proceso, incluso desde el punto de vista histórico. El énfasis en estos aspectos algebraicos puede ser más "cómodo" para el profesor porque, por ejemplo, siempre es más sencillo evaluar esas cuestiones de cálculo que evaluar los aspectos conceptuales. Pero también parece claro que si se procede de ese modo, se está empezando *la casa por el tejado*, se está presentando sólo el final de ese proceso, el *producto acabado*, que, en definitiva, será lo que quedará en el estudiante, en el que los conceptos y, con ellos, sus aplicaciones, serán vistos como *"problemas improcedentes o injustos"*, si es que se proponen en algún examen.

5 Acciones de remedio

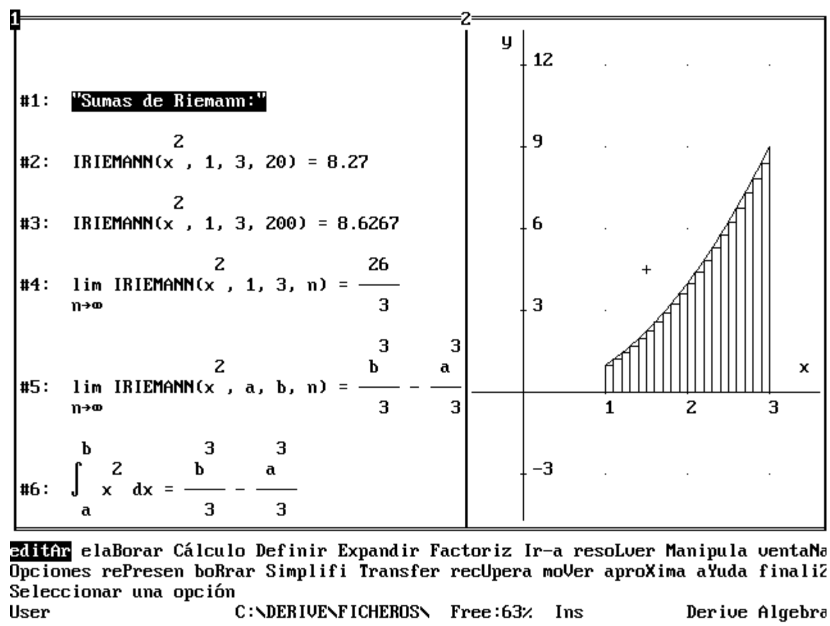
Coherentemente con lo que venimos señalando, nuestra sugerencia parte de una alteración en el orden habitual de exposición de estos temas. Tal modificación parece venir insinuada por el sentido común pero, además, está reforzada por las consideraciones del *modelo de Vinner* ya que un posible remedio para suprimir esos conflictos entre imágenes conceptuales consiste, precisamente, en *explicitar las imágenes de los conceptos*, para facilitar su integración con las nuevas definiciones y deducciones que van a hacerse. Esa *explicitación* puede significar, muchas veces, **visualización** que, como es bien sabido, designa un conjunto de recursos metodológicos y didácticos a los que cada vez se presta mayor atención y que se tiende a considerar casi como imprescindible en la introducción de los conceptos básicos del Análisis (cfr. [10]). La visualización en el contexto de la aproximación local en cualquiera de sus manifestaciones, representa el primer acercamiento a un concepto que, esencialmente, no es visualizable por su naturaleza abstracta pero que, cuando se le priva de este recurso, se convierte finalmente en mero formalismo, en manipulación algebraica.

Esa explicitación de imágenes de la que habla Vinner obligaría a preguntarse, **antes de empezar a tratar el Cálculo integral**, qué es lo que sabe el alumno de este tema, qué imágenes puede tener arraigadas que acaben interaccionando con las nuevas definiciones y deducciones que vamos a tratar. La respuesta, por sorprendente que pueda parecer, es que un estudiante se va a enfrentar por primera vez a este tema sabiendo nada más y nada menos que ¡la fórmula del área del rectángulo! Habrá, pues, que mostrarle cuál es su concepto de área para señalar sus limitaciones y, en consecuencia, la necesidad de ampliarlo para dar respuesta al conocido problema del trapecio mixtilíneo. La construcción de Cauchy-Riemann es, por tanto, **el primer aspecto a tratar**, con la inmejorable posibilidad de recursos de *visualización* que brinda.

Así, si se dispone de un *sencillo* programa de cálculo simbólico como DERIVE (o de una calculadora gráfica con capacidades simbólicas) es relativamente fácil diseñar alguna práctica o ayudarse para las clases de algunas experiencias muy ilustrativas en este sentido. Por ejemplo, con el mencionado

DERIVE es muy fácil definir utilidades que permitan *visualizar* esas sumas y, al mismo tiempo, *calcularlas* (cfr. [1], p. 233 y ss.)

En la ilustración siguiente puede verse la representación de la gráfica de la función $y = x^2$ en [1,3] junto con 20 rectángulos que ayudan a *visualizar* como, en efecto, ese método puede servir para aproximar el área del recinto limitado por esa gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. En la misma pantalla se ha obtenido el valor numérico (aproximado) que corresponde a la suma de las áreas de esos 20 rectángulos. Aumentando el número de rectángulos se mejora la aproximación e, incluso, puede obtenerse una "fórmula" en función de n, siendo n el número de rectángulos. Incluso puede observarse que si se hace n tan grande como se quiera, se obtendría **el valor del área**, no sólo una aproximación (expresión 4 de la figura).



Aspecto de una pantalla de ordenador obtenida con DERIVE

Llevando las cosas aún más lejos, puede generalizarse el resultado para cualquier intervalo $[a, b]$, de modo que se obtiene un resultado que, en este punto, es decir, en el **primer contacto** con las integrales, se puede presentar al alumno como una *casualidad llamativa* (expresión 5).

Incluso en este primer contacto puede decirse, haciendo las precisiones oportunas, que ese proceso se conoce con el nombre de *integral*, cuyo símbolo es el que aparece en la expresión 6. Las limitaciones de este proceso como respuesta al problema del área son bien fáciles de presentar y, naturalmente, también lo son las limitaciones intrínsecas del proceso en sí mismo (incomodidad para obtener las sumas incluso en casos sencillos como el mencionado). De este modo, la regla de Barrow sería ahora una simplificación muy interesante para esta situación que motivaría, por sí sola, la conveniencia de obtener primitivas. La regla de Barrow se presenta ahora *al principio del tema* y, además, en su justa medida, es decir, como un "atajo" para obtener el resultado de la integral cuando es "fácil" (continuidad, existencia de primitiva) y, por tanto, sin dejar de indicar que, lamentablemente, en la práctica las cosas no suelen ser tal sencillas, de modo que en otros casos habrá que conformarse con obtener un valor aproximado de la integral. Si ya se han introducido las series numéricas, puede resaltarse el evidente paralelismo, recordando que, frecuentemente, no es posible obtener exactamente la suma de una serie aunque se tenga la certeza de que es convergente. En todo caso, la referencia a la suma de *infinitos* rectángulos debe hacerse con el detenimiento suficiente para poner de manifiesto que nos enfrentamos de nuevo al problema de la convergencia, por lo que el resultado no está garantizado, de modo que ya no será tan sorprendente que una integral pueda ser divergente.

6 Conclusiones

Insistamos en que, con este esquema, el cálculo de primitivas es algo *secundario*, subsidiario de la regla de Barrow y ésta, a su vez, lo es del concepto de integral que, en definitiva, se ha presentado como una posible solución al problema del área. Observemos que, en definitiva, hemos invertido el orden de exposición habitual. Esta modificación, aparentemente irrelevante, con el oportuno recurso a la *visualización*, es, sin embargo, espectacularmente eficaz, tal como hemos tenido ocasión de comprobar. Por ejemplo, el mismo tipo de preguntas que presentábamos en el primer apartado, fueron contestadas correctamente en más del 80% de los casos en un grupo de 120 alumnos en el que se experimentó el uso habitual de DERIVE y a los que se presentó el cálculo integral como aquí se ha esbozado (más detalles de esta experiencia pueden verse en [2]).

Naturalmente, esos datos no pretenden ser concluyentes, pero es evidente que nuestra sugerencia parece más coherente no sólo con el *modelo de Vinner* aplicado a esta problemática, sino con el uso natural de los recursos tecnológicos actuales (programas de cálculo simbólico, calculadoras gráficas). En efecto, seguir haciendo del adiestramiento en el cálculo de primitivas el objetivo prioritario del cálculo integral, es un anacronismo difícilmente justificable que, a este respecto, plantea contradicciones jocosas. Por ejemplo, es interesante resaltar que esos programas como DERIVE son extraordinariamente eficaces... ¡en lo mismo que se pretende en el modelo tradicional! Así, DERIVE es capaz de calcular casi cualquier primitiva y, además, aplica la regla de Barrow cuando se calcula una integral definida. Pero *¡comete el mismo error que los estudiantes al aplicar la regla de Barrow de forma automática!*

$$\boxed{\#3: \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = -2}$$

Así pues, se podría decir que, en el mejor de los casos, el alumno "tradicional" se acaba equiparando ... ¡con un ordenador! Nuestra propuesta, evidentemente, quita importancia a lo que las máquinas pueden hacer para potenciar los aspectos conceptuales, aquellos en los que la máquina sólo sirve como una ayuda, como un instrumento. Ciertamente, los estudiantes, especialmente en la enseñanza secundaria, deben aprender a calcular a *mano* algunas primitivas, pero sin que nunca se pierda de vista que esa tarea la puede realizar (y, seguramente, de modo más eficaz) una máquina, del mismo modo que deben saber aplicar la regla de Barrow *correctamente*, es decir, mejor aún que la máquina ...

$$\boxed{\#3: \quad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \infty}$$

Referencias

[1] Llorens, J. L., *Aplicaciones de DERIVE al Análisis Matemático - I*, S. Public. de la Universidad Politécnica de Valencia, ISBN 84-7721-237-6, Valencia, 1993.

[2] Llorens, J. L., *A Mathematics Course with DERIVE at Technical Colleges*, International DERIVE Journal, **2**(2), 1995, 33–42.

[3] Llorens, J. L., *Aplicación del Modelo de Van Hiele al Concepto de Aproximación Local* (artículo sobre la Tesis Doctoral del mismo título), Suma, **22**, 1996, 13–24.

[4] Mundy, J., *Analysis of Errors of First Year Calculus Students*, en *Theory, Research and Practice in Mathematics Education*, Bell, A., Low, B. and Kilpatrick, J. (Eds.), Proceedings ICME-5, 1984, 170–172.

[5] Orton, A., *Students' understanding of integration*, Educational Studies in Mathematics, **14**, 1983, 1–18.

[6] Tall, D. O., *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof*, NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 1992, 495-511.

[7] Tall, D. O., Vinner, S., *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, Educational Studies in Mathematics, **12**(2), 1981, 151–169.

[8] Turégano, P., *Los Conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*, Tesis Doctoral, Universidad de Valencia, 1993.

[9] Vinner, S., *The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics*, en *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Ac. Pub., 1991, cap. 5, 65–81.

[10] Zimmerman, W., Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, MAA Notes n. 19, 1991.