1. Introducción

2. Definiciones iniciales

2.1. Funciones elementales.

Son funciones elementales, las funciones de una variable que pueden ser construidas usando esa variable y constantes, por medio de un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, composición, potencias, raíces, incluyendo las funciones tgrigonométricas, exponenciales y logarítmos.
Por ejemplo, son funciones elementales:
$\sin x; \quad \arcsin x; \quad x^2 - 5x + 1; \quad x^x = e^{x \ln x}; \quad \tan[\cos^2(\sqrt[3]{x^2+1} + x - 1)]$

2.2. Integrales elementales

Una integral indefinida $\int f(x)dx$, se dice elemental, si existe una función elemental $F(x)$, tal que $\int f(x)dx = F(x) + C$

3. Algunos comentarios iniciales

3.1. $\int \frac{1}{x}\, dx$ no es racional

Demostración (indirecta): Supongamos que $\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{P(x)}{Q(x)}$. con $P(x)$ y $Q(x)$ sin factores comunes, anotaremos simplemente por P y Q. Luego,

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{1}{x}$$

o sea,

$$\frac{QP' - PQ'}{Q^2} = \frac{1}{x}$$

de donde

$$x(QP' - PQ') = Q^2 \tag{1}$$

de aquí, 0 es una raíz de Q. Luego, $Q(x) = x^n R(x)$, con $R(0) \neq 0$. Reemplazando Q y Q' en (1), y dividiendo por x^n:

$$xPR' - xPR' - nQ'R = x^n R^2$$

De donde, 0 es raíz de Q, hecho que contradice que P y Q no tenían factores comunes. ∎

3.2. Derivación de $\int \frac{1}{x}\,dx$ a partir de $\int x^n\,dx$, con $n \neq -1$

Hint: Como

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

se tiene que

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1} + C'$$

tomando límite cuando n tiende a -1, se obtiene la fórmula de $\int \frac{1}{x}\,dx$.

3.3. Teorema: La derivada de una función elemental siempre es una función elemental.

Como sabemos el teorema anterior no es válido si se cambia *derivada* por *primitiva*. A continuación se presentan y comentan algunos criterios al respecto.
En general no es obvio cuando una integral es o no elemental, por ejemplo,

- $\int e^{x^2}\,dx$ *no es* elemental, pero $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ *es* elemental, en efecto su valor es $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$
- $\int \sqrt{1-x^2}dx$ *es* elemental, pero $\int \sqrt{1-x^3}dx$ *no es* elemetal.

4. Algunos criterios

4.1. Teorema de Laplace (1812).

Sobre el cuerpo de los números complejos, la integral de una función racional es siempre una función elemental.

4.2. Teorema de Chebyshev (1853)

Sean p y q números racionales no nulos. Entonces,

$$\int x^p(1\pm x)^q\,dx \tag{2}$$

es elemental si y solo si, al menos uno de los siguientes números es un número entero: p, q, $p+q$.
Luego,

- $\int \sqrt{x}\sqrt[3]{1-x}\,dx$ no es elemental, pero
- $\int \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{1-x}\,dx$ si es elemental

Actividades: A partir del teorema de Chebyshev, verificar que

1. La integral
$$\int \sqrt[m]{1-x^n}\,dx \tag{3}$$
es elemental siempre y cuando $m=1$, o $n=1$ o $m=n=2$.

   Hint: Cambio de variable $u=x^n$

2. Cuando r y s son números racionales positivos, la integral
$$\int \sin^r x\cos^s x\,dx \tag{4}$$
es elemental siempre y cuando r es un entero impar, o s es un entero impar, o $r+s$ es un entero impar.

   Hint: Cambio de variable $u=\sin t$ tranforma la integral en cuestión a
$$\int u^r(1-u^2)^{\frac{s-1}{2}}\,du$$
y a continuación, $y=u^2$, lleva esta integral a
$$\int y^{\frac{r-1}{2}}(1-y)^{\frac{s-1}{2}}\,dy$$

4.3. Un teorema Liouville (1835).

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales con $g(x)$ no constante, entonces $\int f(x)e^{g(x)}\,dx$ es elemental si y solo si existe una función racional $R(x)$
$$\int f(x)e^{g(x)}\,dx = R(x)e^{g(x)}+C$$
o sea
$$f(x)=R'(x)+R(x)g'(x). \tag{5}$$
Ejemplo: Verificar que $\int e^{x^2}dx$ no es elemental.
Suponer que es elemental, en tal caso luego del teorema precedente, existe una función racional R tal que
$$1=R'+2xR$$
poniendo $R=\frac{N}{D}$ (con $mcd(N,D)=1$, o equivalentemente, N y D no tienen ceros comunes), y simplificando, se tiene
$$N'D-ND'+2xND=D^2$$
de donde
$$D(D-N'-2xN) \;=\; -ND' \tag{6}$$
Con respecto al polinomio D, existe dos posibilidades:

- *D tiene una raíz α de multiplicidad n.* En este caso $D = (x-\alpha)^n q(x)$, con $q(\alpha) \neq 0$.

  Luego, en (6) se tiene que el lado izquierdo tiene una raíz α de grado a lo menos n, mientras que en su lado derecho α tiene orden $n-1$.

- *D no tiene raíces.* En este caso, D es constante, luego de (6):

$$N' + 2xN = Q_0, \text{ con } Q_0 = Q^2$$

  situación que no es posible, pués si $deg(N) = n$, se tiene que el lado izquierdo tiene grado n+1, mientras que su lado derecho es constante.

4.4. Teorema de Liouville-Hardy (1905).

Si $f(x)$ es una función racional, entonces $\int f(x) \ln x \, dx$ es elemental sii existe una función racional $g(x)$ y una constante C tal que

$$f(x) = \frac{C}{x} + g'(x) \tag{7}$$

5. Otras integrales no elementales, a partir de las anteriores

- $\int \sqrt{\ln x} \, dx = \int 2t^2 e^{t^2} dt$, con $t^2 = \ln x$
- $\int (\ln x)^{-1/2} dx = \int 2e^{t^2} dt$. con $t^2 = \ln x$
- $\int (\ln x)^{-1} dx = \int \frac{e^t}{t} dt$. con $t = e^x$
- $\int \ln(\ln x) dx = x \ln(\ln x) - \int \frac{1}{\ln x} dt$

6. Algunas conclusiones

- Pérdida de *importancia* del TFC??
- Debido a que las integrales elementales son *escasas*, qué tan amplio debería ser el formulario que se les entrege a los estudiantes...o quizas el uso de una tabla extensa de integrales??
- Dado que toda función racional es elemental, comentar brevemente el método de las fracciones parciales, dado que la integral más frecuente para su uso es $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, cuya *respuesta* aparece en todo formulario.
- Enfatizar los métodos de integración numérica. El uso de estos métodos debería ser más frecuentes. Incluso aunque la integral sea elemental, a veces igual resulta más cómodo el uso de métodos numéricos.

Referencias

[1] **Kasper, Toni**. *Integration in Finite Terms: The Liouville Theory.*Mathematics Magazine, Vol. 53, No. 4. (Sep., 1980), pp. 195-201.

[2] **Yetta V. Maizlish**. *Infinitesimal and Finite Integration of (1/x).* Mathematics News Letter, Vol. 4, No. 8. (Jun., 1930), pp. 19-21.

[3] **Marchisotto, Elena Anne; and Zakeri, Gholam-Ali** . *An Invitation to Integration in Finite Terms*. The College Mathematics Journal, Vol. 25, No. 4. (Sep., 1994), pp. 295-308. Stable

[4] **Stein, S. K.** *Formal Integration: Dangers and Suggestions.* The Two-Year College Mathematics Journal, Vol. 5, No. 2. (Spring, 1974), pp. 1-7.