Diseños de bloque

Patricia González Pérez[1]
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

El concepto de diseño fue estudiado en un principio por los estadísticos, en el área llamada diseño de experimentos. A través de la investigación de R.A. Fisher y sus seguidores, esta área ha llegado a tener un papel importante en la teoría moderna del análisis estadístico. Los diseños están relacionados con los planos afines y los planos proyectivos finitos. Acá, sólo plantearemos la idea a través de un ejemplo y analizaremos las condiciones en las cuales podría existir un diseño.

Definición:

Sea V un conjunto con v elementos. Una colección $\{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ de subconjuntos de V es un *diseño de bloque incompleto equilibrado*, o *diseño (v,b,r,k,l)*, si satisface las siguientes condiciones:

1. Para cada $i=1,2, \ldots, b$; el subconjunto B_i tiene k elementos, donde k es una constante fija y k es menor que v.
2. Cada elemento x de V está en r (r menor o igual que b) de los subconjuntos B_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, b$
3. Para cada par x, y de elementos de V aparecen juntos en l (l menor o igual que b) de los subconjuntos B_i, $i=1, 2, 3, \ldots, b$

Los elementos de V suele denominarse *variedades*, debido a que sus primeras aplicaciones en el diseño de experimentos fueron en pruebas de fertilizantes y plantas. Los b subconjuntos $B_1, B_2, \ldots, B_b$ de V son los *bloques*, donde cada bloque contiene k variedades. El número r es el *número de réplica del diseño*. Por último, l es la *covalencia del diseño*. Este parámetro equilibra el diseño en el siguiente sentido. Para los diseños de bloque generales, tenemos un número l_{xy} para cada par x, y en V; si l_{xy} es el mismo para todos los pares de elementos de V, entonces l representa esta medida común y el diseño está equilibrado.

Ejemplo 1.

Para V={1,2,3,4,5,6}, los 10 bloques:

124	134	156	236	346
126	135	235	245	456

son un diseño (6,10,5,3,2). El 6 $(=v)$ indica el número de variedades (número de elementos de V). El 10 $(=b)$ corresponde al número de bloques. $5\ (=r)$ es el número de réplica del diseño, ésto es, cada elemento de V aparece cinco veces en los diez bloques. $3(=k)$ es la cantidad de elementos de V (variedades) en cada bloque. $2(=l)$, ya que cada par de números del 1 al 6 aparecen juntos 2 veces en los 10 bloques, y es la medida común e indica que el diseño está equilibrado.

[1] Universidad de Talca, Casilla 271, Talca. e-mail: pattygo@pehuenche.utalca.cl

Ejemplo 2.

Dino (D) *y su esposa Maruja* (M) *viajan a Madrid con sus cinco hijos: Rosa* (R), *Pedro* (P), *Carolina* (C), *Benito* (B) *y Jacinto* (J).
Durante su estancia de una semana reciben tres pases para cada día, para visitar el museo El Prado. ¿Podemos hacer un programa para esta familia de modo que todos visiten este museo el mismo número de veces?

Solución:

El siguiente programa es una posibilidad de visitas al museo:

Primer día : Benito, Carolina y Dino.
Segundo día : Benito, Jacinto y Rosa.
Tercer día : Benito, María y Pedro.
Cuarto día : Carolina, Jacinto y María.
Quinto día : Carolina, Pedro y Rosa.
Sexto día : Dino, Jacinto y Pedro.
Séptimo día : Dino, María y Rosa.

Este programa lo podemos escribir en forma abreviada como sigue:

1) B, C, D	2) B, J, R	3) B, M, P	4) C, J, M
5) C, P, R	6) D, J, P	7) D, M, R	

Aquí se obtuvo el resultado por ensayo y error, técnica que se puede utilizar para un problema de tamaño menor como éste. Sin embargo, en general se necesita una estrategia más eficaz. Además, al pedir cierto programa, se podría estar pidiendo algo que no existe. Por ejemplo, podríamos pedir que al menos un par de miembros estén juntos en más de una visita. Si la familia recibe 4 pases cada día, no podríamos construir un programa que conservara la idea de visitar el museo el mismo número de veces.

Volvamos a nuestro ejemplo, y vamos a mostrar que el programa de visitas para la familia corresponde a un diseño.
En efecto,

- Las variedades (elementos de V) son los miembros de la familia; en símbolos, anotaremos que $V=\{D,M,R,P,C,B,J\}$; conjunto con 7 elementos, por lo tanto $v=7$.
- El programa descrito para la familia corresponde, en términos simbólicos, a la colección $\{B_1, B_2, \ldots, B_7\}$, donde $B_1=(1)=\{B,C,D\}, \ldots, B_7=(7)=\{D,M,R\}$; todos subconjuntos de V y son 7, así que $b=7$ (número de elementos de la colección).
- Cada B_i tiene 3 elementos, $i=1,2,3,\ldots,7$, luego $k=3$ (3 son los pases diarios, luego son 3 los visitantes).
- Cada miembro de la familia visita 3 veces el museo con los pases durante la semana, ésto es cada elemento x de V está en $3(=r)$ de los subconjuntos B_i, $i=1,2,3,\ldots,7$.

- Finalmente, cada par de miembros de la familia visitan juntos el museo solamente en una oportunidad, es decir, $l=1$

En consecuencia, el programa de nuestro ejemplo, es un caso de un diseño de bloque incompleto equilibrado o diseño *(7,7,3,3,1).*

Relación entre los parámetros de un diseño. Hasta aquí tenemos 5 parámetros que determinan nuestro diseño. Ahora veremos la relación entre estos parámetros.

Teorema. *Para un diseño (v,b,r,k,l), se tiene (1) vr=bk , y (2) l(v-1)=r(k-1)*

Demostración:

1. Con b bloques en el diseño y k elementos por bloque, enumeramos todos los elementos de los bloques y obtenemos bk símbolos. Esta colección de símbolos consta de los elementos de V donde cada elemento aparece r veces, para un total de vr símbolos. Por lo tanto, $vr=bk$
2. Para demostrar la propiedad *(2)*, usamos la matriz A de incidencia dos a dos de este diseño.

Si el número de elementos de V es v, entonces llamemos t al número de pares de elementos de V, es decir, t es igual al número de grupos de dos elementos que se pueden formar con v elementos, $t=v!/(v-2)!\,2! = v(v-1)/2$.

Construimos la matriz $t \times b$ $A=(a_{ij})$ definida por $a_{ij}=1$ si el i-ésimo par de elementos de V está en el j-ésimo bloque del diseño; en caso contrario $a_{ij}=0$

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & B_1 & B_2 & \dots & B_b \\
x_1\ x_2 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1b} \\
x_1\ x_3 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2b} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_1\ x_v & a_{v-1\,1} & a_{v-1\,2} & \dots & a_{v-1\,b} \\
x_2\ x_3 & a_{v1} & a_{v2} & \dots & a_{vb} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{v-1}\ x_v & a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tb}
\end{array}$$

Ahora contaremos el número de unos en la matriz A de dos formas.

a) Consideraremos las filas. Puesto que cada x_i, x_j (para *1 menor o igual que i, i menor que j, j menor o igual que v)* aparece en l bloques, se sigue que cada fila contiene l números unos. Con $i(=t)$ filas en la matriz, el número de unos es entonces $lt=lv(v-1)/2$.

b) Consideremos ahora las columnas. Como cada bloque tiene *k* elementos, esto determina *k(k-1)/2* pares y éste es el número de unos en cada columna de la matriz *A*. Con *b* columnas, el número total de unos es *bk(k-a)/2*.

Entonces, *lv(v-1)/2=bk(k-1)/2=vr(k-1)/2.*, de modo que *l(v-1)=r(k-1).*

q.e.d

Ejemplo 3.

¿Será posible tener un diseño (*v,b,r,k,l*) tal que *b=28, r=4, k=3?*

Solución: Debemos determinar si existen números enteros *v, l,* tales que cumplan las condiciones (1) y (2) del teorema anterior, ésto es, *vr=bk* , y *l(v-1)=r(k-1)*
Si *v=28, r=4* y *k=3,* entonces por (1)*, 4v=84;* de donde, *v=21.*
Por otro lado, *l(21-1)=4(3-1),* es decir, *20l=8,* obteniéndose que *l=8/20,* lo que no puede ser.

Por último se plantean algunos ejercicios que no deberían ocasionar mayores problemas al tratar de resolverlos.

Ejercicio 1.

Sea *V={1,2, 3, ... , 9}.*

a) Determinar los valores de *v, b, r, k* y *l* para el diseño dado por los siguientes bloques:

147	234	279	378	468	126
189	258	369	459	567	135

b) Encontrar un ejemplo de diseño *(4,4,3,3,l)*
c) Encontrar un ejemplo de diseño *(7,7,4,4,l)*
d) Completar la tabla siguiente de modo que los parámetros *v,b,r,k,l* de cualquier fila sean posibles para un diseño de bloque incompleto equilibrado.

v	***b***	***r***	***k***	***l***
4			3	2
9	12		3	
10		9		2
13		4	4	
	30	10		3

Ejercicio 2.

El Sr. Castro, profesor de computación, dio a un grupo de sus alumnos una lista de 28 problemas e indicó a cada estudiante que escribiera los algoritmos para resolver exactamente siete de estos problemas. Si cada estudiante hizo lo indicado y si para cada par de problemas había exactamente un par de estudiantes que escribieron el algoritmo para resolverlos, determinar cuántos estudiantes tiene el profesor de computación en su curso.

Bibliografía

a) Hall, Marshall Jr., *"Combinatorial Theory"*, Waltham, Mass., Blaisdell, 1967
b) Street, Anne Penfold y W.D. Wallis, *"Combinatorial Theory: An Introduction"*, Winnipeg, Canadá, The Charles Babbage Research Center,1977. (material sobre diseño y la teoría de codificación).
c) Wallis, W.D., *"Combinatorial Designs"*,. Nueva York, Marcel Dekler, Inc., 1988. (reseña muy completa del tema de los diseños)
d) Diniz, Jeffrey H. y Douglas R. Stinson, editores, *"Comtemporary Design Theory"*, Nueva York, Wiley, 1992. (recopilación de los trabajos más recientes en el área).