LONGITUD VERSUS AREA

Genaro Castillo Guzmán[1]
Prof. Instituto de Matemática y Física - Universidad de Talca

El objetivo de estas notas es mostrar que procedimientos usados para definir un concepto relacionado con un objeto unidimensional, a veces, no se puede extender a otro objeto "análogo" bidimensional. En concreto, la noción de longitud de una curva enfrentada con la de área de una superficie.

Antes de entrar al área chica haremos una panorámica desde el medio campo:

Concepto de curva.

Casi todos tenemos incorporados, especialmente, a través de la observación visual (especialmente) las nociones de curva y superficie, pero una ciencia exige rigor en los conceptos de modo que éstos sean independientes del sujeto y sus emociones.

Por este motivo comenzamos con ciertas aclaraciones.

Llamaremos *curva* a una función continua $\gamma : [a,b] \longrightarrow I\!R^n$, $t \longmapsto \gamma(t)$.

Para nuestros efectos, consideraremos $n = 2$ o $n = 3$. Si $n = 2$ la imagen de γ estará en $I\!R^2$, y si $n = 3$ estará en $I\!R^3$.

Si $\gamma(t) \in I\!R^3$, entonces la imagen $\gamma(t)$ se puede expresar en términos de sus funciones componentes, en la forma $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

La idea es que cuando t "recorre.el segmento desde a hasta b el punto correspondiente $\gamma(t)$ recorre una curva continua en el espacio $I\!R^n$. Se considera que el orden en el que se recorren los puntos de la curva es una propiedad esencial de la propia curva.

Un mismo conjunto, como el de la figura 1, recorrido en las direcciones señaladas en las figuras 2 a la 5 será considerado como curvas diferentes.

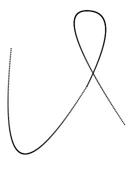

Figura 1

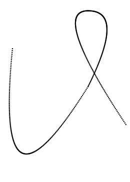

Figura 2

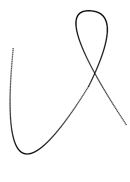

Figura 3

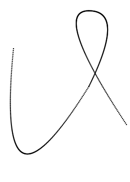

Figura 4

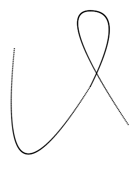

Figura 5

Como necesitamos hacer cálculos con estos objetos, por derivada de $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entenderemos $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ cuando las derivadas de las funciones componentes

[1] e-mail: gcastill@utalca.cl

existan. Además, cuando x', y', z' como funciones de t también son continuas, entonces se dice que γ es de clase C^1.

El recorrido de γ, anotado Recγ, es el conjunto Rec$\gamma = \{\gamma(t) \ / \ a \leq t \leq b\}$. Por ser γ continua, este conjunto es compacto en $I\!R^n$.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow I\!R^n$ una curva.

Diremos que la *curva* γ *es cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$ (figura 6).

Diremos que la *curva* γ *es simple* si $t_1 \neq t_2$ y $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, entonces $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$ (figura7).

Diremos que la *curva* γ *es de Jordan* si que Rec$(\gamma) \subset I\!R^2$ y la curva es simple y cerrada (figura 8).

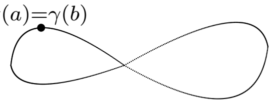

Figura 6

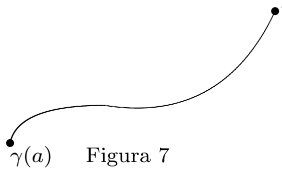

Figura 7

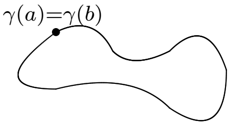

Figura 8

[Agreguemos aquí un resultado, intuitivamente evidente pero cuya demostración es bastante técnica, que establece: El recorrido de una curva de Jordan divide al plano $I\!R^2$ en exactamente dos componentes, una de ellas acotada (la encerrada por su recorrido) y la otra no acotada (la exterior al recorrido)].

Una relación es *relación de equivalencia* cuando es refleja, simétrica y transitiva. Es conocido que una relación de equivalencia definida sobre un conjunto lo "particiona.en lo que se denomina clases de equivalencia.

Aunque ya habíamos puesto una flechitas sobre las curvas, la siguiente definición crea el concepto de "camino orientado".

Equivalencia de curvas.

Consideremos dos curvas γ y $\overline{\gamma}$ definidas de $[a, b]$ en $I\!R^n$. Diremos que γ y $\overline{\gamma}$ son equivalentes cuando existe una función $\varphi : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ biyectiva y de clase C^1 que satisface las condiciones:

$$\varphi(a) = c \quad , \quad \varphi(b) = d \quad \text{y} \quad \gamma = \overline{\gamma} \circ \varphi$$

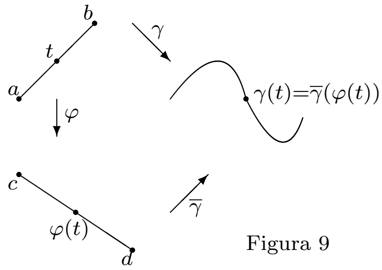

Figura 9

Intuitivamente, dos curvas son equivalentes cuando poseen el mismo recorrido y lo recorren el mismo número de veces en el mismo sentido cada vez.

Ejemplo 1. *Consideremos las curvas* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ *y* γ_4 *definidas, respectivamente, por*

$$\begin{array}{llll} \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad , & 0 \le t \le 2\pi \quad ; & \gamma_2(t) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \quad , & 0 \le \theta \le 1; \\ \gamma_3(t) = (\cos u, \sin u) \quad , & 0 \le u \le 4\pi \quad ; & \gamma_4(t) = (\cos(2\pi - v), \sin(2\pi - v)) \ , & 0 \le v \le 2\pi. \end{array}$$

Estas curvas tienen el mismo recorrido, pero son equivalentes sólo γ_1 *y* γ_2*. La curva* γ_3 *representa dos vueltas al círculo unitario y la curva* γ_4 *representa sólo una vuelta al círculo unitario pero en sentido revertido al de* γ_1*.*

Camino orientado.

Se llama camino orientado a cada clase de equivalencia definida por la relación de equivalencia antes mencionada. Al camino definida por la curva γ se anota $[\gamma]$ y es la clase de todas las curvas equivalentes a γ.

Camino opuesto. Para una curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow I\!R^n$ se define su camino opuesto $-\gamma$ por

$$-\gamma : [a, b] \longrightarrow I\!R^n \quad , \quad -\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$$

En el ejemplo, observe que γ_4 es el camino opuesto de γ_1.

Dejaremos hasta aquí este discurso, se está alargando demasiado y nos concentraremos en los objetivos iniciales.

Las curvas de clase C^1 son *rectificables* en el sentido que se les puede asignar un número llamado *longitud* que puede calcularse por paso al límite de las longitudes de cualquier familia de poligonales inscritas en la curva.

Vamos a deducir una fórmula para una curva en $I\!R^2$ por medio de un procedimiento que se puede extender sin sobresaltos a $I\!R^3$.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow I\!R^2$ una curva de clase C^1 y una partición arbitraria de $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$$

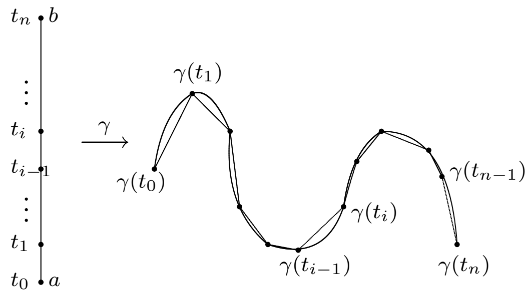

Figura 10

Para esta partición de $[a, b]$, el conjunto de los vértices de la poligonal P_n inscrita en la curva γ es

$$\{\gamma(a) = \gamma(t_0), \gamma(t_1), \cdots, \gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i), \cdots, \gamma(t_n) = \gamma(b)\}$$

Como en este caso $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, entonces

$$\gamma(t_{i-1}) = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1})) \quad , \quad \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$$

y la longitud del segmento que une $\gamma(t_i)$ con $\gamma(t_{i-1})$ es

$$l_i = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} \tag{1}$$

Las funciones $x(t)$, $y(t)$ son derivables en $]a, b[$, por el teorema del valor medio se tiene

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi)(t_i - t_{i-1}) \quad , \quad y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\zeta)(t_i - t_{i-1}) \tag{2}$$

donde $t_{i-1} < \xi$, $\zeta < t_i$.

Reemplazando (2) en (1), resulta

$$l_i = \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\zeta)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

Si denotamos por $l(P_n)$ la suma de las longitudes de cada uno de los l_i desde $i = 1$ hasta n, entonces

$$l(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\zeta)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \tag{3}$$

expresión que corresponde a una suma de Riemann de la función $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ asociada a la partición prefijada del intervalo $[a, b]$. Luego, cuando tiende a 0 el diámetro de la partición, el segundo miembro de (3) converge a

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

De aquí resulta natural el concepto de longitud de una curva γ.

Sea $\gamma : [a, b] \longrightarrow I\!R^2$ una curva de clase C^1. Llamaremos *longitud de* γ y lo anotaremos $l(\gamma)$ a la cantidad

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

No es complicado ver que $l(\gamma) = l(-\gamma)$ y que esta magnitud únicamente depende del recorrido de γ y del número de veces que se pase por cada uno de sus puntos.

Ejemplo 2. *Si* $\gamma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow I\!R^2$ *definida por* $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, *entonces la derivada es* $\gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t)$ *y la longitud de la curva* $l(\gamma_1)$ *es*

$$l(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = 2\pi$$

Observe que en el Ejemplo1: $l(\gamma_1) = l(\gamma_2) = l(\gamma_4)$ *pero* $l(\gamma_3) = 4\pi$.

Ejemplo 3. *Si* $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$, $0 \le t \le 4\pi$, *entonces* γ *es la curva denominada hélice y su recorrido está en* $\mathbb{R}^3$. *La derivada es* $\gamma'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 4)$. *Así la longitud de la hélice es*

$$l(\gamma) = \int_0^{4\pi} \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16}\, dt = 20\pi$$

Si la curva γ es solamente continua, entonces se considera el conjunto de las longitudes de todas las poligonales inscritas en la curva variando sobre todas las particiones del intervalo $[a, b]$ y se define su longitud por

$$l(\gamma) = \sup\{l(P_n) \ : \ P_n \text{ es poligonal correspondiente a cierta partición de } [a, b]\}$$

Cuando este conjunto es acotado el supremo existe. En caso contrario el supremo no existe y se dice que la longitud de γ es infinita.

Ejemplo 4. *Sea* $\gamma(t) = (t, t\cos\frac{1}{t})$ *si* $0 \le t \le 1$, $\gamma(0) = (0, 0)$. *En este caso,* $l(\gamma) = +\infty$. *Para verificar ésto se puede elegir la poligonal proveniente de la partición*

$$0 < \frac{1}{\pi(n-1)} < \frac{1}{\pi(n-2)} < \cdots < \frac{1}{\pi(n-i+1)} < \frac{1}{\pi(n-i)} < \cdots < \frac{1}{\pi} < 1$$

y ver que la longitud de la poligonal tiende a infinito cuando $n \to +\infty$.

[En un concepto aparentemente simple como una curva nos podemos encontrar con grandes sorpresas. Una curva continua, generalmente, la pensamos como la trayectoria de un punto en movimiento y esta vaga noción la asociamos con delgadez o unidimensionalidad. Para el caso de curvas planas, Jordan (en 1887) dió una expresión precisa de este intuitivo concepto geométrico mediante la siguiente definición: "si γ *es una función continua del intervalo* $I = [0, 1]$ *en el plano euclideano* $\mathbb{R}^2$, *entonces el subconjunto* $\gamma(I)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *es una curva continua". La solidez de la definición de Jordan se mantuvo después del descubrimiento de Peano (en 1890) de una curva continua que pasa por cada punto de un cuadrado cerrado.*

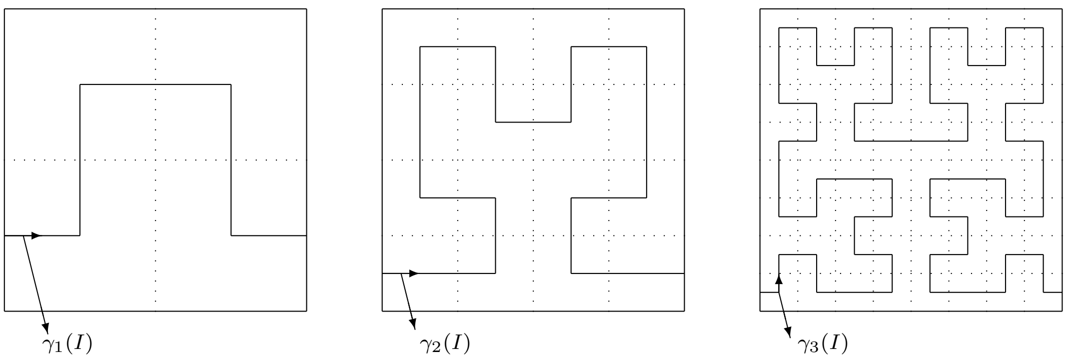

Figura 11

En la Figura 11 se muestran las tres primeras etapas de la construcción de una curva que llenaría el cuadrado. Si $C = \{(x, y) \ / \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1\}$ *es el cuadrado, entonces las respectivas curvas son los recorridos de* I *bajo las funciones continuas* γ_1, γ_2 *y* γ_3 *de* I *en* C*. El proceso de construcción puede continuar de la misma manera y ésto conduce a una sucesión de funciones continuas* $(\gamma_n)_n \in \mathbb{N}$ *de* I *en* C*. Por la forma en que se generan estas curvas desde su antecesora, la sucesión* (γ_n) *converge puntualmente a una función* γ *de* I *en* C*, y como esta convergencia es uniforme y cada* γ_n *es continua, entonces* γ *es también continua. Por lo tanto,* $\gamma(I)$ *es una curva continua en el sentido de Jordan. Además cada punto de* C *está en* $\gamma(I)$*, así* $\gamma(I)$ *llena este cuadrado.*

Como se puede apreciar este descubrimiento de Peano es un atentado contra la idea preconcebida de lo que una curva continua debería ser, pero lo que puede ser un descalabro para unos puede representar una oportunidad para otros. Esto sugirió el problema de determinar qué es una curva continua, en otras palabras, el de encontrar propiedades topológicas intrínsecas de un subconjunto de A *de* $\mathbb{R}^2$ *que sean equivalentes a la existencia de una aplicación continua de* I *en* A*. Así se llegó a una extensión de la definición de Jordan en un contexto más amplio como son los espacios topológicos: "un espacio topológico* A *se dice una curva continua si* A *es un espacio de Haussdorff y existe una aplicación continua de* I *sobre* A*].*

Para abreviar esta contienda nos desviamos hacia las superficies.

Idea de superficie.

Intuitivamente, consideraremos una superficie S como un conjunto de puntos del espacio $\mathbb{R}^3$ que semeja una porción de un plano en una vecindad de cada uno de sus puntos. (Recuerde que a no pocos siglos hacia el pasado se consideraba plano a nuestro planeta). Esto sucederá cuando la superficie S sea el recorrido de una función "suficientemente buena"de un conjunto de puntos del plano $\mathbb{R}^2$.

Una curva fue definida como una función continua de un intervalo cerrado en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

Es posible proceder de manera semejante y definir "superficieçomo la imagen de un rectángulo cerrado vía una función continua a $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, problemas relacionados con superficies son mucho más profundos y complejos que aquellos pertinentes a curvas. Para no meternos en un laberinto con pocas posibilidades de regreso, congelaremos aquí estas nociones para abocarnos a nuestro objetivo inicial.

Aceptando que una superficie tendrá un pequeño parecido a una curva, en un principio, se insinúa razonable pensar en el área de la superficie como el supremo de las áreas de todos los poliedros inscritos en ella, de la misma forma como la longitud de una curva, se define igual al supremo de las sumas de longitudes de todas las poligonales inscritas en la curva.

Un ingenioso ejemplo, debido a H. A. Schwarz, muestra que aún con una simple superficie como la de un cilindro de radio r y altura h (sabemos que tiene área $2\pi rh$), el procedimiento sugerido por los poliedros conduce a una área infinita. Comenzamos a describir este sorprendente hallazgo.

Consideremos un cilindro circular recto de radio 1 y altura 1, lo cortamos a través de una generatriz y lo desenrollamos en un rectángulo de lados 1 y 2π (figura 10).

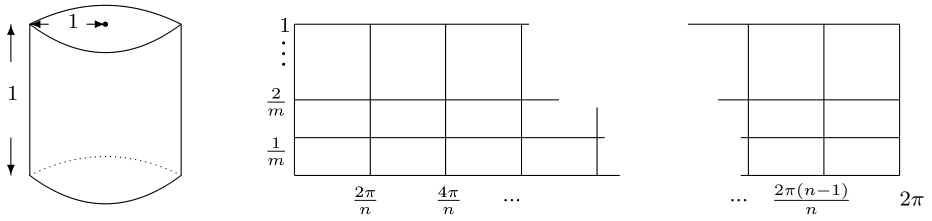

Figura 11

A continuación, subdividimos este rectángulo en pequeños subrectángulos por medio de $m-1$ líneas paralelas igualmente espaciadas a los lados longitud 2π, y $n-1$ líneas paralelas también igualmente separadas a las de largo 1. Cada uno de esos subrectángulos, trazando diagonales, los dividimos en 4 triángulos. Si el rectángulo grande se vuelve a enrollar para volverlo al cilindro original, los vértices de esos $4mn$ triángulos pasan a ser ahora vértices de $4mn$ triángulos planos en el espacio y constituyen un poliedro inscrito en el cilindro. Veremos a continuación que si m crece más "rápidamente"que n, el área total de esos poliedros se hace no acotada. Para confirmar este hecho sólo pondremos atención en los $2mn$ triángulos espaciales correspondientes a los del tipo achurado en la figura 10.

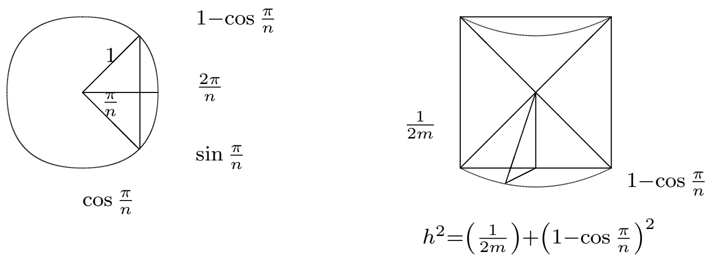

Figura 12

Como el triángulo espacial tiene base igual a $2\sin\frac{\pi}{n}$ y altura $h > 1-\cos\frac{\pi}{n} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n}$, la suma de las áreas de esos $2mn$ triángulos espaciales es mayor que S_{mn}, donde

$$S_{mn} = 2mn\sin\frac{\pi}{n}\,2\sin^2\frac{\pi}{2n} = \left(4n\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(m\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)$$

Tomando límite cuando $n \to +\infty$, la cantidad en el primer paréntesis tiende a 4π y si $m = n^3$ la expresión en el segundo paréntesis tiende a $+\infty$ cuando $n \to +\infty$.

Exijo una explicación!, diría Condorito. Cuando uno vive al alero de la Matemática es porque ha contraido sagrado vínculo con la razón y un sujeto de principios no debe aflojar mientras no sea exhibida una exhaustiva demostración; de todas maneras, debemos admitir que aprendemos a caminar en el conocimiento guiados por la intuición.

Debido a las dificultades al intentar una definición de área de una superdicie por un proceso directo de límite y como los métodos más usuales de manipular áreas de superficies es mediante integrales, los matemáticos toman un camino directo y definen el área de una superficie en $\mathbb{R}^3$ en términos de una integral doble, de convincente respaldo intuitivo y que satisfaga ciertas condiciones de invarianza. Su fórmula puede encontrarse en cualquier texto de cálculo avanzado.