Programas de ordenador en la educación matemática[1]

Miguel de Guzmán

¿FICCION O REALIDAD? Una clase de matemáticas. Estudiantes de 16 ó 17 años. Cada uno de ellos tiene en su mesa un ordenador de la forma y tamaño de un libro. El profesor está tratando de comprobar el dominio de unas cuantas rutinas de sus alumnos. Les propone el siguiente examen:

1. *Hallar con 6 dígitos significativos las raíces de la ecuación x^3-2cosx+1,9=0.*
2. *Calcular con 4 dígitos significativos los coeficientes del polinomio P(x) de interpolación de grado 4 que se ajusta a los datos siguientes P(2,3)=3.57, P(4,5)=2.35, P(5,32)=6.21, P (21,3)=5.22, P(12,37)=8.73.*
3. *Representar la curva dada en paramétricas por las ecuaciones x(t)=(3t -1)/(t-2), y(t)=(5t -3)/(t-3), hallando las ecuaciones de todas sus asíntotas así como los máximos, mínimos y demás puntos notables de la curva.*
4. *En cuatro triángulos bien diferentes dibujar el círculo inscrito, los tres exinscritos y el círculo que pasa por los tres puntos medios de los lados. ¿Qué conclusión se obtiene de este experimento?*
5. *Desde lo alto de una torre de 100 metros de altura se pretende lanzar un proyectil en dirección Norte a velocidad 1 m/s de modo que el alcance al llegar al suelo sea máximo. Calcular, en grados, minutos y segundos, el ángulo de tiro con que se ha de disparar dicho proyectil (tómese $g=9.81\ m/s^2$).*
6. *Demostrar que para todo número natural n se verifica $1^4+2^4+3^4+...+n^4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$*
7. *Obtener una primitiva de la función $1/(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$ descomponiendo la fracción algebraica propuesta en fracciones simples.*

Tiempo: 1 hora. Los resultados se presentarán en un disco, indicando claramente los pasos por los que se ha procedido.

Ninguno de los estudiantes hace aspaviento alguno. Cada uno abre su ordenador y se pone a trabajar pausadamente. Saben que una hora es más que suficiente para que incluso les quede tiempo para revisar sus procesos. Apenas utilizan lápiz ni papel. Al cabo de la hora entregan cada uno su disco al profesor.

[1] Bajado desde http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/velamayor/ordenadoreducacion.html

¿Ficción? No del todo. Los instrumentos de los que hoy día ya disponemos nos permiten prever que los procesos de enseñanza- aprendizaje de la matemática a nivel secundario en un futuro muy próximo nos permitirán llegar sin gran esfuerzo a una situación como la que deja traslucir el examen descrito.

Los ejercicios anteriores son, en su mayor parte, meras rutinas que hoy se hacen sin esfuerzo alguno gracias a los programas de cálculo simbólico tales como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA,... Quien los maneja sólo tiene que conocer bien claramente lo que al programa le ha de preguntar y poseer algún hábito en proponerle las preguntas al programa de tal modo que éste actúe de modo eficiente. Todo el esfuerzo del estudiante se centra en entender la estructura del ejercicio. El esfuerzo rutinario del cálculo o del dibujo, con todos los riesgos de equivocaciones e imprecisiones que conlleva, han sido traspasados al programa, que los realiza con suma rapidez y fiabilidad.

Papeles diversos de los sistemas simbólicos

Los programas de cálculo simbólico actuales admiten papeles muy variados en las interacciones entre los tres elementos fundamentales

[alumnos]

[profesor] [instrumentos didácticos]

que constituyen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Por supuesto, el programa es un potente, rápido y versátil auxiliar en las tareas de cálculo, tanto numérico como simbólico, así como en la representación y exploración gráfica de funciones que tanto facilita el análisis de situaciones matemáticas complejas. Esta facilidad nos permite descargar en el ordenador muchas de las tareas de cálculo que aparecen incluso en una auténtica demostración matemática. Por ejemplo, el ejercicio 6 admite una demostración de estructura sencilla a través del proceso de inducción completa, pero la comprobación de que si se verifica la propiedad enunciada para el número natural h entonces se verifica también para h+1 es una tarea rutinaria, aburrida y un tanto engorrosa que se puede dejar a cargo del programa.

Pero uno cualquiera de los programas antes mencionados admite utilizaciones mucho más ricas que las de mero manipulador de números y expresiones matemáticas, sin más que hacer uso con un poco de destreza de las facilidades de construcción de rutinas propias que el programa mismo ofrece generosamente. Entonces se le pueden encomendar cometidos variados directamente relacionados con las tareas de aprendizaje a diversos niveles. La presentación e introducción de los conceptos sutiles del cálculo, como el límite, la derivada, la integral, pueden resultar mucho más asequibles a través de las exploraciones numéricas y gráficas que el programa realiza con tanta facilidad.

Por ejemplo la idea de derivabilidad de una función en un punto se puede transmitir a través de su "linealidad local", es decir la curva que representa la función se hace prácticamente una recta en las cercanías del punto. Desde el punto de vista de su representación, la función será derivable en ese punto cuando al hacer un zoom suficientemente cercano de la curva correspondiente alrededor de ese punto lo que aparece en la pantalla es prácticamente un segmento. Su pendiente es precisamente el valor de la derivada de la función en ese punto.

Por otra parte, utilizando los instrumentos del propio programa, se puede convertir éste de la "caja negra" que es en su utilización normal (el usuario no ve cómo el programa procede para obtener el resultado que le presenta) en "caja gris" (el usuario ve al menos parte de los pasos de realización). Así por ejemplo se puede modificar la obtención rápida y directa que el programa hace de la integral en el problema 7 de arriba (sólo apretamos una tecla y ya obtenemos el resultado final) en un proceso como el que se sugiere en el enunciado del problema que tenga lugar paso a paso, a través de la descomposición de la expresión a integrar en fracciones simples, tal como lo haríamos nosotros mismos si no dispusiéramos del programa. O bien se pueden puede introducir pasos intermedios como cambios de variable, integración por partes, etc. que el programa usa sin dejárnoslos ver, a menos que explícitamente se lo pidamos y lo acondicionemos adecuadamente para que así lo haga.

Por otra parte, la potencia y versatilidad de los programas de cálculo simbólico actuales hacen posible el acercamiento de nuestra enseñanza de la matemática al mundo de las aplicaciones reales. Para cualquiera que lo examine con un poco de detenimiento es claro que el ejercicio 5 del examen anterior (el alcance máximo no se obtiene, como alguien a primera vista estaría tentado a pensar, mediante la inclinación de tiro de 45º) sería un ejercicio de cálculo simbólico y numérico bastante respetable para cualquier profesor de análisis infinitesimal sin la utilización del ordenador. No es que el ejercicio del aprendizaje de las técnicas matemáticas se haya de realizar directamente a través de situaciones con datos reales. Más bien la complejidad de la realidad aconseja lo contrario. Pero sí es cierto que, una vez que el alumno sabe lo que hay que hacer para resolver el problema matemático surgido de una situación real, le resulta mucho más motivador poder enfrentarse con el problema tal cual es en la realidad, una vez que el ordenador le ha liberado de la impotencia de realizar por sí mismo los cálculos que la situación real le imponen, como ocurre muy a menudo en la enseñanza tradicional.

Los programas de cálculo simbólico de un futuro próximo integrarán en una unidad muchos procesos que hora están dispersos en diferentes programas muy extendidos y que harán su utilización en las tareas de la educación matemática mucho más flexibles y transparentes. El ejercicio 4 de los arriba propuestos, por ejemplo, es de muy fácil realización con los elementos que proporciona el actual programa AUTOCAD, utilizado en diseño, y conduce enseguida al descubrimiento del teorema de Feuerbach (el círculo determinado por los puntos medios de los lados, el llamado círculo de los 9 puntos, es tangente a los círculos inscrito y exinscritos), pero no sería de realización fácil con un programa como el DERIVE. Existen en la actualidad programas diseñados para el aprendizaje de diversas parcelas concretas de la matemática (por ejemplo CABRI-GÉOMÉTRE o bien GEOMETER SKETCHPAD para geometría, con el que el ejercicio 4 sería también sencillo).

Integrando el ordenador en los procesos de aprendizaje

Imaginemos la situación de una clase de matemáticas de nivel secundario que en un futuro no lejano será probablemente usual. Cada uno de los alumnos dispone de un ordenador en el que un programa de acceso muy simple les proporciona la realización fácil y sencilla de todas las rutinas de cálculo numérico y simbólico (solución de ecuaciones, límites, derivación, integración, cálculo matricial,...), obtención directa de parámetros y funciones estadísticas a partir de una masa de datos, representación versátil e interactiva de curvas y superficies, la realización precisa de las operaciones de dibujo fundamentales,... El programa es de acceso tan fácil e intuitivo que los estudiantes han sido capaces de familiarizarse con su manejo en la primera semana de curso. (En la actualidad un programa como DERIVE es dominado razonablemente por los alumnos en unas pocas horas de introducción).

¿Cuál será el proceso de enseñanza-aprendizaje adecuado a este entorno? Es obvio que la dinámica de la nueva situación didáctica

[profesor]-[alumnos]-[instrumentos didácticos]

hará cambiar necesaria y profundamente tanto los contenidos de la educación matemática como los procesos de interacción dentro y fuera de clase.

Estando presente un programa que es capaz de realizar con gran comodidad y seguridad todas las rutinas de cálculo numérico y simbólico ¿qué razones se pueden presentar para proponer como meta muy importante de la labor del estudiante alcanzar una práctica de tales rutinas rápida y segura, puesta a prueba en numerosos y complejos ejercicios, con la consiguiente inversión en tiempo y esfuerzo?

El énfasis ahora podrá colocarse en el fomento y estímulo por parte del profesor de las destrezas superiores que ningún programa puede transmitir con la misma eficacia que él y que consisten en:

- introducir al estudiante en el ejercicio continuado de la experimentación matemática, hecha ahora mucho más fácil a través de los medios de que dispone, explorando cómodamente regularidades y pautas de comportamiento de los objetos matemáticos que permitan adivinar y conjeturar sobre su propia naturaleza más escondida y hacerla patente a través del ejercicio de la demostración

- ayudar al estudiante a entender profundamente los problemas básicos de la teoría, su origen, su motivación, las ideas que los resuelven, su evolución posterior, las estrategias y rutinas que estas ideas han originado hasta convertirse en los instrumentos ágiles y eficaces que hoy son

- iniciar al estudiante en el ejercicio de la modelización matemática de situaciones reales, más o menos complejas, en las que se pueda percibir la enorme potencia y eficacia de las herramientas intelectuales de que va disponiendo, magnificadas ahora a través del apoyo en los útiles de que dispone

- proceder con paz en la resolución de verdaderos problemas, no ya meros ejercicios, que permitan al estudiante ir construyendo sus propias constelaciones de esquemas de pensamiento eficaces para la resolución de los problemas de cada uno de los campos en que se introduce.

Una de las tareas importantes del profesor consistirá ahora en hacerse con una panoplia de actividades concretas para conseguir los objetivos apuntados que, contando con el apoyo eficaz del ordenador,

- sean capaces de ayudar al estudiante en la exploración de situaciones que conducen a los conceptos fundamentales de la porción de teoría en la que se le introduce,
- estimulen el reconocimiento de estructuras y patrones,
- ayuden a relacionar los diversos modos de representación (gráfica, algebraica, numérica,...),
- animen al estudiante a atreverse a explorar incluso situaciones que sin el apoyo del sistema serían demasiado difíciles o llevarían demasiado tiempo,
- inicien al estudiante mismo a la utilización de la matemática y de los sistemas de apoyo emulando las formas como el experto usuario de la matemática los utiliza en su quehacer cotidiano para la resolución de sus problemas reales.

La pregunta que surge inmediatamente es: "Vayamos a lo práctico. ¿Cómo se puede poner en funcionamiento este proyecto?" En algunos países existen ya centros en los que la situación didáctica descrita al comienzo de este apartado es ya una realidad desde hace unos cuantos años. ¿Cuáles son las formas de proceder que, tras diversas experiencias, han parecido adecuadas contando con la presencia continuada del ordenador y de los programas de cálculo simbólico con los que ahora se cuenta?

El siguiente esquema es un modelo de enseñanza utilizado por los profesores universitarios japoneses H. Murakami y M. Hata, que bien pudiera constituir una fuente de inspiración para otros niveles. Supongamos que se trata de introducir al alumno en el tema E de una cierta secuencia de aprendizaje de los temas A-B-C-D-E-...(podemos pensar en [sucesiones] -[funciones] -[limite] -[derivada]-...). Se distinguen dos fases de aprendizaje: la fase básica y la fase de uso y aplicación de E.

Los objetivos de la fase básica consisten en

- que el estudiante entienda a fondo los problemas que dan lugar a E,
- que conozca bien los conceptos, estrategias, métodos fundamentales a propósito de E,
- que domine razonablemente el funcionamiento de las herramientas y rutinas que resuelven los problemas de E (sin necesidad de virtuosismos con problemas excesivamente complicados; sólo problemas que ayuden a una mejor comprensión y dominio básico)

La enseñanza de la fase básica se lleva a cabo de modo cercano al convencional pero

- se puede dedicar más tiempo para lo básico, rehuyendo problemas complicados
- se utiliza el apoyo del ordenador para la realización de actividades, según se ha indicado antes, que ayuden a una mejor comprensión de los problemas e ideas clave

- NO se utiliza el programa en esta fase para realizar las tareas de E con las que el alumno se ha de hacer familiar a través de casos sencillos, ya que ello impediría el dominio de las tareas propias de E
- SÍ se utiliza el programa para realizar las tareas que aparecen en esta fase propias de A, B, C, D, temas que ya se suponen dominados.

Los objetivos de la fase de uso y aplicación de E son:

- que el estudiante compruebe la potencia de E para resolver problemas más complicados
- que entienda a fondo la relación de E con otros temas
- que perciba la utilidad de E en aplicaciones intra y extramatemáticas

Durante esta fase se hace uso pleno del programa para todas las tareas en las que resulte conveniente.

El camino a recorrer

Es claro que nos queda un trecho considerable por recorrer para llegar de donde estamos a una situación como la que se ha descrito en este artículo. Los obstáculos más importantes no provienen tanto de las dificultades para colocarnos en una situación material como la señalada, ciertamente no despreciables, sino más bien de la inercia profundamente enraizada en el sistema educativo de cualquier país y en gran parte connatural a él. Los cambios no se realizarán, y más vale que no se realicen, sin tener las ideas bien claras de las metas a las que queremos dirigirnos. Para ello es necesario invertir un esfuerzo considerable en investigar y explorar las diversas alternativas. Por otra parte, un cuerpo de docentes preparado en una universidad inerte ella misma, donde las ideas de vanguardia en educación carecen del estímulo adecuado presentará una resistencia notable a un cambio que, si se ha de realizar con éxito, ha de llevarse a cabo con carácter global en el sistema y con un amplio consenso.

Con todo, lo que parece claro es que la educación matemática no puede comportarse a largo plazo ignorando la presencia en el ambiente y en la cultura social y profesional de instrumentos con altas potencialidades específicamente en el terreno matemático. Lo que hay de saludable en las nuevas tendencias acabará por imponerse y los sistemas educativos que se adapten a los cambios razonables más rápidamente lograrán equipar ventajosamente a las personas a ellos encomendadas.

Bibliografía

En castellano apenas hay libros dedicados a la utilización de programas de cálculo simbólico en la enseñanza secundaria de acuerdo con las ideas sugeridas en este artículo. Existen con todo unas pocas obras orientadas al nivel universitario que bien pueden servir de inspiración para nuestros profesores de enseñanza secundaria.

GARCIA, A.(ed.): Prácticas de Matemáticas con DERIVE. CLAGSA, Madrid.

de GUZMÁN, M. y RUBIO, B. (1993): Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático. Volumen 3. Pirámide, Madrid.
LLORENS FUSTER, J.L.(1993): Introducción al uso de DERIVE. Aplicaciones al Álgebra Lineal y al Calculo Infinitesimal. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.
LLORENS FUSTER, J.L. (1993): Aplicaciones de DERIVE. Análisis Matemático-I (Cálculo). Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.