

La fórmula de Euler: Poliedros, Grafos Planares y Topología

Eric Gottlieb

Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca 2004-2005
Apoyado por Beca Fulbright #4499
Rhodes College, Memphis, TN, USA

Introducción

El propósito de este artículo es explorar una relación inesperadamente sencilla que existe entre el número de caras, lados, y vértices de cualquier poliedro. Esta relación se conoce como la fórmula de Euler, llamada así por Leonhard Euler, que la descubrió alrededor del año 1750. En 1794, Legendre ofreció la primera demostración de este resultado.

Los poliedros han sido objetos de estudio por más que dos mil años. Euclides dedicó el libro 13 de sus *Elementos* al estudio de los poliedros cerca del año 300 a.C., y dejan un área de investigaciones activa. Son interesantes como objetos geométricas fundamentales, en el contexto de topología algebraica, y en el contexto más aplicado de programación lineal.

Para evitar detalles técnicos, supondremos que el lector sabe que es un poliedro. Esto nos permitirá explorar la fórmula de Euler sin empantanarnos en detalles. Usaremos la fórmula de Euler para demostrar unos resultados sencillos de la teoría de grafos. Veremos unos poliedros insólitos que nos mostrarán que necesitamos una definición cuidadosa de poliedro para visualizar el alcance de la fórmula de Euler. Al final discutiremos una generalización de la fórmula de Euler que nos permitirá concluir unos resultados, obvios intuitivamente, pero difíciles demostrar del área de matemática que se conoce como topología.

Actividades estrelladas para el lector son distribuidos a través del artículo. Unos son fáciles y otros muy difíciles. Con más estrellas, más difícil problema, en mi evaluación para alguien que no conoce el material. Los problemas están pensados para mantener el lector ocupado con el material. El lector no tiene que preocuparse si no puede resolver algunos.

Los Sólidos Platónicos

Los sólidos Platónicos, que incluyeron el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro, y el icosaedro, están mostrados en Figura 1. Los sólidos Platónicos son los únicos poliedros regulares. Un poliedro *regular* es uno en que todas las caras son polígonos regulares congruentes, el mismo número de caras concurren en cada vértice, y el ángulo entre cada pareja de caras, que compartan un lado, es lo mismo.



Figura 1
Los sólidos Platónicos

Contando el número de caras, bordes, y vértices de estos poliedros nos da la tabla mostrada abajo. Si C , R , y V representan el número de caras, bordes, y vértices, respectivamente, entonces es fácil ver que C , R , y V están relacionados por $C - R + V = 2$ para cada objeto. Esta ecuación se conoce como *la fórmula de Euler*.

	Tetraedro	Cúbico	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras	4	6	8	12	20
Aristas	6	12	12	30	30
Vértices	4	8	6	20	12

Actividad 1 (*): Dibújense unos poliedros más. Cuente las caras, las aristas, y los vértices y verifique que se cumple la misma relación.

Grafo, Conectividad, y Planaridad

Se cumple la fórmula de Euler para todos los poliedros que probaste. ¿Pero como podemos demostrar que se cumple la relación para todos los poliedros?^ Nos ayudaremos de un área de la matemática conocida como la teoría de grafos. Un *grafo* es un conjunto finito de puntos que se llaman vértices, unas parejas que pueden ser unidos por segmentos. Un grafo se muestra en Figura 2.

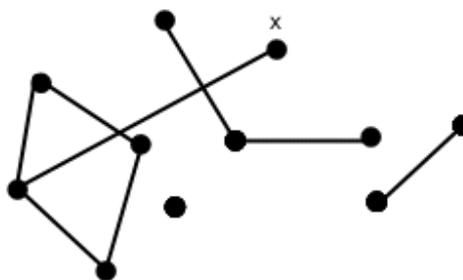


Figura 2
Un grafo planar y desconectado

^ Si cumple o no la fórmula de Euler para cada poliedro depende en la definición de <<poliedro>> que usamos. Después, veremos unos ejemplos de poliedros insólitos para los que no se cumple la fórmula. Sería un buen ejercicio para el lector tratar de encontrar tales poliedros antes que los presentemos.

El grafo en Figura 2 consta de cuatro *componentes conectados*. Un componente es un vértice. Otro consta de dos vértices unidos por un segmento. El tercer componente está construyendo de tres vértices unidos por dos segmentos. El último componente consta de cinco vértices unidos por cinco segmentos. Ya que el grafo tiene más de un componente conectado, decimos que el grafo está *desconectado*. Si un grafo tiene exactamente un componente conectado, entonces se conoce como *grafo conectado*.

No se ve bien que se crucen unos segmentos en el grafo de la Figura 2. Por supuesto, podríamos dibujar el grafo tal que los segmentos no se crucen, por moviendo el vértice calificado con una x un poco a la izquierda, también el segmento que se toca. Los grafos que se pueden dibujar en el plano sin segmentos cruzados se conocen como *grafos planares*. Entonces, el grafo mostrado en la Figura 2 es planar aunque está dibujado con segmentos cruzados.

Por otra parte, siempre cuando dibujamos en el plano el grafo de la Figura 3, habrán segmentos cruzados. Demostraremos esto usando un teorema demostrado en 1930 por el matemático polaco Kasimir Kuratowski.



Figura 3
Un grafo conectado y no planar

La Figura 4 muestra dos grafos no planares más sencillos. Se conocen como el grafo completo en dos conjuntos de tres vértices cada uno y el grafo completo en cinco vértices. Usamos $K(3, 3)$ y $K(5)$ para representarlos.



Figura 4
 $K(3, 3)$ y $K(5)$, dos grafos conectadas y no planares

Actividad 2(*):** Demuestre que $K(3, 3)$ y $K(5)$ son no planares.

Después, resolveremos la Actividad 2 usando la fórmula de Euler, pero el lector debe tratar duramente de resolverlo ahora usando métodos propios. De este modo podrá apreciar posteriormente el poder del sencillo resultado de Euler.

Teorema 1 (de Kuratowski): Una gráfica no es planar si y solo si contiene o una copia de $K(3, 3)$ o una copia de $K(5)$.

Para ilustrar el significado de la frase “contiene una copia,” veremos en la Figura 5 que el grafo de Figura 3 contiene una copia de $K(5)$. Al principio borramos tres segmentos y un vértice que no necesitamos; aparecen en gris en la primera imagen. Después, contraemos el segmento uniendo los vértices u y v y fusionamos u y v . Ya que u y v son ambos adyacentes a w , eliminamos una de esos segmentos. También eliminamos el vértice gris en la segunda imagen por mezclar los dos segmentos que tocan. Ahora podemos ver una copia de $K(5)$ que fue ocultada en el grafo original. Por el teorema de Kuratowski, sabemos que el grafo original no puede ser planar.

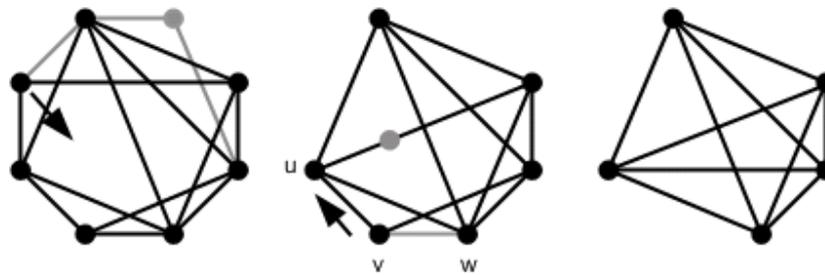


Figura 5

Encontrando una copia de $K(5)$ en una gráfica no planar

No es obvio como encontrar una copia de $K(3, 3)$ o $K(5)$ en un grafo dado. ¿Con qué rapidez puede un mejor algoritmo demostrar que un grafo dado es o no es planar? Esta pregunta es del tipo que habría que hacer a un experto computacional, estudiando la complejidad de computación. En 1974, John Hopcroft y Robert Tarjan [6] contestaron la pregunta para encontrar un algoritmo complejo, sutil, y rápido para determinar si es planar o no es planar un grafo dado.

Una demostración de la fórmula de Euler usando la teoría de grafo

Los grafos planares son pertinentes aquí porque a cualquier poliedro corresponde un grafo conectado y planar. Se puede obtener este grafo imaginando los lados del poliedro como formando un marco elástico. Por estirar una cara abierta de par en par y después empujando al plano, se puede conseguir una representación del grafo del poliedro en el plano. Las caras, los lados y los vértices del poliedro corresponden a las caras, los segmentos, y los vértices del grafo si contamos la región ilimitada que contiene la imagen como una cara. Sobre esta convención, un poliedro cumple la fórmula de Euler si y solo si el grafo correspondiente también lo cumple. En Figura 6 encontramos los grafos de los sólidos Platónicos.

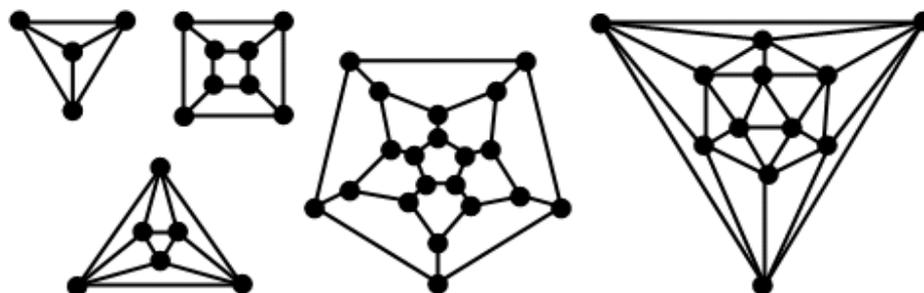


Figura 6
Los grafos de los sólidos Platónicos

Actividad 3 (*): Dibuje los grafos de los poliedros que encontró en Actividad 1.

Por supuesto, hay grafos conectados y planares que no son los grafos de ningún poliedro.

Actividad 4 (**)**: Determine cuales grafos conectados y planares son los grafos de un poliedro.

Actividad 5 (*): Dibuje unos grafos conectados y planares y verifique para cada uno que $C - R + V = 2$.

Demostremos que la fórmula de Euler funciona para cada grafo conectado y planar. Esto demostrará que la fórmula funciona para los grafos de poliedros y, entonces, para poliedros. En matemáticas, es común demostrar un resultado más general para demostrar un caso más específico, como hacemos aquí.

Para demostrar que se cumple la fórmula de Euler para grafos conectados y planares, al principio demostraremos que se cumple para el caso más sencillo, específicamente para el grafo G_0 contando de solamente un vértice. Entonces, demostraremos que como construimos de G_0 otras grafos conectados y planares más y más complejos, no cambiará el valor de la expresión $C - R + V$. Ya que todos los grafos conectados y planares pueden ser contruidos de G_0 en la manera que describiremos, el resultado estará demostrado. Este enfoque es una versión de una técnica poderosa que se conoce como *inducción*.

Teorema 2: Si G es un grafo conectado y planar con C caras, R segmentos, y V vértices, entonces $C - R + V = 2$.

Demostración: Nótese que si $G = G_0$, entonces G tiene una cara (la ilimitada), un vértice, y ningún segmento. Es decir, $F = 1$, $E = 0$, y $V = 1$ tal que $F - E + V = 1 - 0 + 1 = 2$ como se deseaba.

¿Dado un grafo conectado y planar G' , como podemos ampliarlo? Podemos realizar dos operaciones. Cumplimos la primera uniendo dos vértices de G' con un segmento nuevo, como es mostrado en Figura 7 y la segunda agregando un vértice nuevo y uniéndolo con un vértice de G'

con un segmento nuevo, como es ilustrado en Figura 8. Cada grafo conectado y planar puede ser construido de G_0 por R de estas operaciones.

Denotamos el número de caras, lados, y vértices de G' por C' , R' , y V' . Denotamos por G el grafo obtenido haciendo uno de las operaciones en G' y el número de caras, lados, y vértices de G by C , R , y V . Ahora consideraremos como están relacionadas las expresiones $C' - R' + V'$ y $C - R + V$.

Para la primera operación, supongamos que el nuevo segmento r une los vértices u' y v' . Entonces u' y v' tienen que estar en la misma cara c' de G' . Por eso, agregando e causará c' ser remplazado con dos caras nuevas c_1 y c_2 , y las otras caras de G mantendrán en correspondencia con las caras de G' menos c' . Es decir, $C = C' + 1$. También, ya que agregamos un segmento nuevo a G' y no cambiamos los otros, tenemos $E = E' + 1$. No agregamos vértices, por lo que $V = V'$. Entonces, $F - E + V = (F' + 1) - (E' + 1) + V' = F' - E' + V'$ y la expresión no ha cambiado.

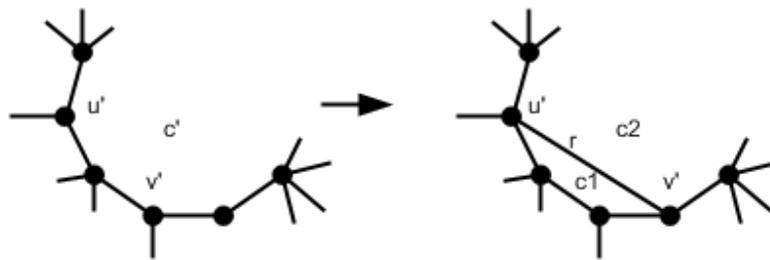


Figura 7
Agregando un borde

Para la segunda operación, el nuevo vértice v está agregando adentro de una cara c' de G' y está unido por un nuevo segmento r a un vértice v' de G' .

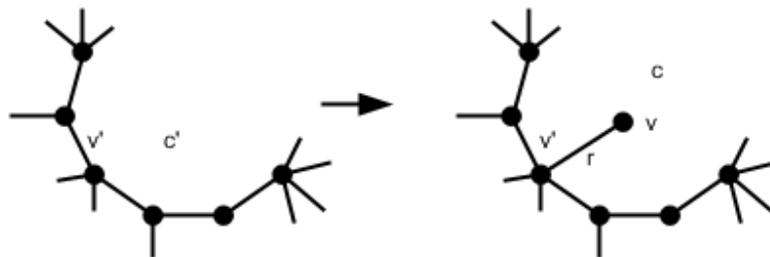


Figura 8
Agregando un borde y un vértice

La cara c de G correspondiendo a c' parece diferente de c' , pero el número de caras no cambia, luego $F = F'$. Ya que agregamos r y v a G' , conseguimos $E = E' + 1$ y $V = V' + 1$. Por eso, $F - E + V = F' - (E' + 1) + (V' + 1) = F' - E' + V'$. Otra vez, las expresiones son iguales. Hemos demostrado el resultado. \square

Mostramos en la Figura 9 una manera de construir el tetraedro de G_0 y verificamos que la cantidad $C - R + V$ no cambie en cada paso.

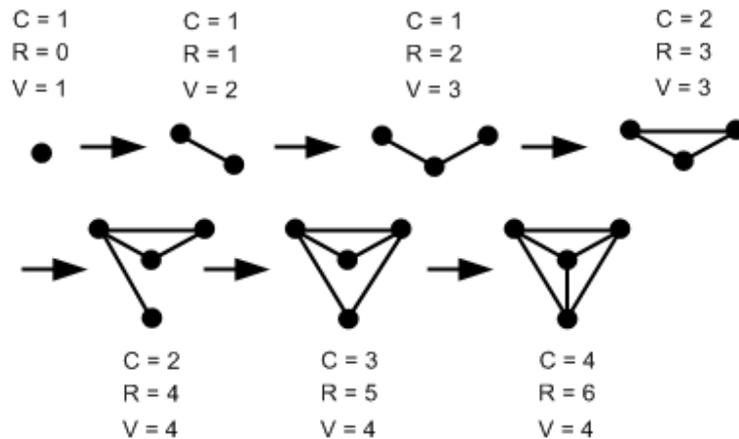


Figura 9
Construyendo el tetraedro

Dos aplicaciones de la fórmula de Euler

Aplicaremos la fórmula de Euler para resolver Actividad 2. Usaremos el hecho siguiente. Para una cara c de un grafo planar, denotamos por $l(c)$ el número de lados de c . Si c_1, c_2, \dots, c_n son las caras de un grafo planar, entonces $l(c_1) + l(c_2) + \dots + l(c_n) = 2R$. Para ver eso, nótese que cada recta está contada dos veces en la suma del lado izquierdo, una vez para cada cara que lo contiene.

Teorema 3: $K(5)$ no es planar.

Demostración: $K(5)$ es conectada y tiene 5 vértices y 10 rectas. Si $K(5)$ es planar, entonces por la fórmula de Euler tenemos $C - 5 = C - 10 + 5 = C - R + V = 2$ tal que $F = 7$. Sean f_1, f_2, \dots, f_7 las caras de $K(5)$. Ninguna pareja de vértices de $K(5)$ está unida por 2 segmentos, entonces cada cara satisface $3 \leq l(c_i)$. Por el hecho de arriba, tenemos $21 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \leq l(c_1) + l(c_2) + \dots + l(c_7) = 2(10) = 20$. Esta contradicción muestra que $K(5)$ no es planar. \square

Teorema 4: $K(3, 3)$ no es planar.

Demostración: $K(3, 3)$ es conectada y tiene 6 vértices y 9 segmentos. Supongamos que $K(3,3)$ es planar. Por la fórmula de Euler tenemos $C - 3 = C - 9 + 6 = C - R + V = 2$, luego $C = 5$. Ninguna pareja de vértices está unida por dos segmentos, entonces no puede ser caras con dos lados. Cada ciclo de $K(3, 3)$ tiene un número par de segmentos, entonces cada cara necesita tener un número par de lados. Por eso, cada cara tiene a menos cuatro lados. Si hay m_i caras con i lados, entonces $m_4 + m_6 + \dots = 5$. Por el hecho de arriba, tenemos $4m_4 + 6m_6 + \dots = 2(9) = 18$. Eliminando m_4 del sistema de ecuaciones nos da $2m_6 + 4m_8 + \dots = -2$. Esta no es posible porque cada m_i no es negativo. Esta contradicción muestra que $K(3, 3)$ no es planar. \square

Nótese como estos problemas engañosos han sido reducidos a poco más que aritméticos.

Porqué definiciones cuidadosas son importantes

Ahora discutimos unos objetos raros que quizás parecen como poliedros, pero no se comportan como poliedros en el sentido de cumplir la fórmula de Euler. Considere el poliedro ilimitado mostrado en Figura 10. Tiene $C = 4$, $R = 6$, y $V = 3$ tal que $C - R + V = 1$ y falla la fórmula de Euler.

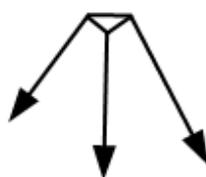


Figura 10
Un poliedro ilimitado

Actividad 6 (*): Descubre porque la demostración de Teorema 1 no funciona para este ejemplo.

Quizás debemos restringirnos a poliedros limitados, es decir, poliedros que pueden ser contenidos en una esfera de radio finito. Los ejemplos que parecen en Figura 11 muestran que este requisito no basta. El primero muestra dos tetraedros tocándose en un vértice. El segundo muestra dos tetraedros unidos a un lado. El tercero es hecho de dos sólidos rectangulares pegando una cara del más pequeño en el medio de una cara del otro.

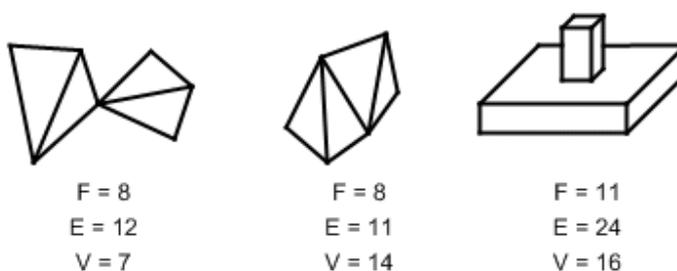


Figura 11
Tres poliedros malos

No es fácil decir qué falla. Ilustra cuan importante es, cuando se hace matemáticas, ser precisos.

Actividad 7 ():** ¿Por qué falla la demostración de la fórmula de Euler para estos poliedros?

Una característica que cada de estos poliedros tienen en común es que cada uno tiene hoyos. Es decir, existen segmentos lineales uniendo dos puntos de los poliedros tal que el segmento no está contenido en el poliedro como se ilustra en la Figura 12. Esto no pasa en el caso de los sólidos Platónicos. Un objeto que contiene a todos los segmentos que unen dos puntos del objeto

se conoce como *convexo*. Se puede demostrar que la fórmula de Euler se cumple para todos los poliedros limitados y convexos. Convexidad es una propiedad profunda con muchas consecuencias poderosas y útiles.



Figura 12
Un objeto no convexo

Un poliedro usualmente está definido como la intersección limitada de un número finito de mediospacios. Esto implica convexidad, entonces la fórmula de Euler funciona para cada poliedro así definido. Nótese que los sólidos Platónicos cumplen esta definición, pero no los ejemplos de las Figuras 10 y 11.

Una Generalización de la Fórmula de Euler

Hay una otra clase de poliedros para los que falla la fórmula de Euler, pero para los cuales podemos enunciar una relación semejante. La superficie de un donut se conoce como un *torus*; ver Fig. 13.



Figura 13
Un torus

Unos poliedros, como se encuentra en Figura 13, son parecidos al torus en el sentido que tienen un agujero. Por esos, la relación correcta es $C - R + V = 0$.

Actividad 8 ():** Use el teorema de Kuratowski para demostrar que el grafo del poliedro en la Figura 14 no es planar.

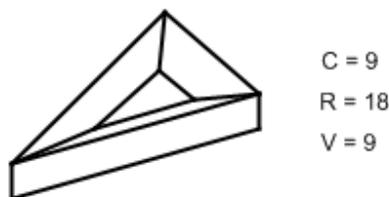


Figura 14
Un poliedro de género 1

El *género* de un poliedro es el número de agujeros que tiene. Los sólidos Platónicos todos tienen género 0, mientras el poliedro de Figura 14 tiene género 1. Se puede construir poliedros con tantos agujeros como se quiera.

Como con poliedros de género cero, es útil dibujar los grafos de sus lados, pero encontrará difícil dibujar poliedros de género más que cero a menos que tenga un talento artístico. Sería más fácil dibujarlo en un torus, porque allá podemos dibujar las rectas sin que no crucen, mientras no podemos hacerlo en el plano. Desgraciadamente es difícil construir modelos del torus y todavía difícil incluirlos en este artículo. Por eso, representamos dibujos en el torus en la manera siguiente.

Imagínese cortando un torus, abriéndolo en un tubo, cortando el tubo en su longitud, y aplanando en una hoja como en Figura 15. Cualquier dibujo en el torus sería transferido a la hoja, pero por supuesto quizás el dibujo está cortado en el proceso.

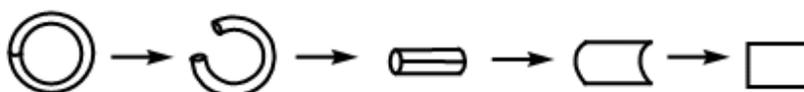


Figura 15

Cortando un torus a una hoja plana

Podemos hacer estos pasos al revés, al principio dibujando en una hoja y después enrollar la hoja haciendo un torus. En esta manera, podemos representar un dibujo en un torus en un dibujo en una hoja. Por ejemplo, el grafo del poliedro mostrado en Figura 14 puede ser dibujado como es mostrado en Figura 16. Regiones de la hoja que son una parte de la misma cara tienen mismos números y segmentos que son partes del mismo segmento tienen las mismas letras.

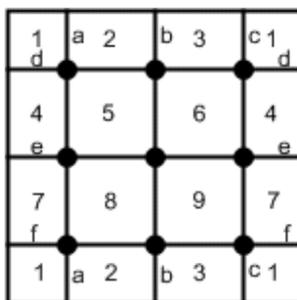


Figura 16

Un dibujo de el grafo de un poliedro de género 1 en el torus

Actividad 9 ():** Dibuje las grafo de $K(3, 3)$ y $K(5)$ en el torus y verifique que para éstas, $C - R + V = 0$.

Teorema 5: Sean C , R , y V el número de caras, lados, y vértices de un poliedro de género g . Entonces $C - R + V = 2 - 2g$.

Esta relación fue encontrada por el matemático francés-suizo Simon Lhuilier (1750-1840). Tomando $g = 0$ nos da la fórmula de Euler. Entonces, la fórmula de Lhuilier's es una generalización de la fórmula de Euler. El matemático francés Henri Poincare generalizó el resultado todavía más, pero una declaración de su generalización esta afuera del alcance de este artículo.

Topología

Podemos pensar la fórmula de Euler como diciendo que cada poliedro parecido a una esfera satisface $C - R + V = 2$. En este sentido, el número 2 es una propiedad de la esfera. Asimismo, la fórmula de Lhuilier's nos dice que el número 0 es una propiedad del torus, y el número -2 es una propiedad de la superficie con dos agujeros como es mostrado en Figura 17, etcétera. Es decir, estas fórmulas nos permiten movernos más allá de poliedros a las superficies. Desde el punto de vista histórico, esto fue el principio de topología, el área de matemática interesada con las propiedades que no varían por operaciones como estiramiento o doblamiento.



Figura 17

Una superficie de género 2

En topología, frecuentemente quiere distinguir entre superficies (o otros objetos) diferentes. Seguramente la esfera y el torus nos parecen diferentes, ¿pero como sabemos que no hay una manera ingeniosa de estirar o doblar el torus para hacerlo parecer como una esfera? La herramienta mejor de un topologista para tal trabajo es un *invariante topologicamente*. Un invariante topologicamente es una característica notablemente de una superficie que no cambie cuando estiramos o doblamos la superficie. $C - R + V$ es un invariante topologicamente sabía como la *característica de Euler*.

Si dos superficies, como la esfera y el torus, pueden ser demostrado tener características de Euler diferentes, entonces sabemos que son diferentes topologicamente. Es decir, no podemos estirar o doblar una para obtener la otra. Por eso, la fórmula de Lhuilier nos da la siguiente resultado.

Teorema 7: Si dos superficies tienen géneros diferentes, entonces son distintos topologicamente. En particular, no es posible cambiar la esfera en el torus por doblarlo o estirarlo.

Conclusiones y más para leer

Una observación de poliedros nos lleva explorar dos áreas de matemáticas, la teoría de grafo y la topología. Espero que leyendo este artículo se anima a ti a creer que relaciones sencillas y poderosas como la fórmula de Euler pueden estar ocultas en lugares familiares y buscarlos.

Para aprender más de poliedros, el lector interesado puede querer consultar un libro de poliedros como lo de Cromwell [4]. Si quiere aprender más de la teoría de grafo, *Introductory Graph Theory* [3] es un buen libro para empezar. *Graph Theory with Applications* [2] es un clásico ameno. La teoría de grafo atractiva porque casi todo sus teoremas y problemas abiertos son fáciles entender y porque tiene muchas aplicaciones al problemas del mundo real. Topología es menos accesible pero también es un sujeto interesante. *Experiments in Topology* [1] contiene proyectos que pueden interesarse. *Topology* [5] es más comprehensivo en alcance.

Referencias

- [1] Barr, S. *Experiments in Topology*. New York: Dover, 1964.
- [2] Bondy, J. A. y Murty, U. S. R. *Graphic Theory with Applications*. New York: North Holland, 1976.
- [3] Chartrand, G. *Introductory Graphic Theory*. New York: Dover, 1985.
- [4] Cromwell, P.R. *Poliedros*. Cambridge University Press, 1997.
- [5] Hocking, J. G. y Young, G. S. *Topology*. New York: Dover, 1988.
- [6] Hopcroft, J. y Tarjan, R., *Efficient Planarity Testing*, JACM 21 (1974), pp. 449-568.

