Modelo de experimento de decaimiento radioactivo con resultados factibles de contrastación experimental.

Walter Bussenius Cortada

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Introducción:

Hacer experimentos de decaimiento radioactivo resulta complicado, por un lado porque se debe manipular objetos peligrosos, puesto que emiten radioactividad; y por otro debido a que la implementación para realizar experimentos no es fácil de adquirir.

El presente trabajo explica un sencillo experimento de simulación, empleando dados, que permite reproducir una curva de decaimiento radioactivo y así determinar, ya sea la "vida media" o la actividad en función del tiempo. El modelo es muy simple y permite ser utilizado por alumnos de los ciclos de enseñanza tanto básico, medio o universitario; claro está, que el nivel de profundidad en el análisis que pueda hacerse dependerá del nivel de los estudiantes.

El modelo emplea dados, los que representan núcleos radioactivos (Ref. [1]). Es conveniente usar un número grande de dados a objeto de permitir una mejor estadística de los datos.

A modo de ejemplo, podemos decir que empleando cerca de un ciento de dados, un gráfico que represente el número de partículas en función del tiempo requiere alrededor de un cuarto de hora. El modelo permite manejar la probabilidad de emitir de los átomos y con esto la vida media de ellos, valor que puede determinarse experimentalmente y que puede ser contrastado con el resultado esperado. También el modelo permite simular que el núcleo que emite radiación se trasmuta en otro núcleo, también radioactivo y que a su vez emite con diferente vida media. Este segundo experimento simulado requiere el empleo de dados de dos colores.

El modelo también resulta de utilidad para un profesor de matemáticas que estudie la función exponencial, permitiéndole aplicarla en algo concreto y así fortalecer el aprendizaje de sus alumnos; también les permite repasar la función de la recta y aplicar propiedades de los logaritmos.

Teoría:

La función que describe el número de partículas radioactivas en función del tiempo es:

$$\mathbf{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}} \tag{1}$$

donde $\mathbf{N(t)}$ representa el número de partículas existentes al tiempo $\mathbf{t}$, $\mathbf{N_0}$ corresponde al número de partículas en tiempo cero, λ a una constante característica de cada tipo de partículas y que se relaciona con la vida media (Ref. [2]).

Puesto que no es posible determinar el instante en que cada núcleo radioactivo se desintegrará, se define la "vida media", que corresponde al tiempo necesario para que el número de núcleos se reduzca a la mitad de la cantidad inicial. Este valor es independiente del número de partículas y del momento en que se realiza la medición. Evidentemente que la cantidad de partículas debe ser considerable a objeto de que se pueda aplicar criterios estadísticos.

Puesto que si graficamos **N(t)** en función del tiempo **t**, resulta ser una curva, se saca mayor provecho al graficar el logaritmo natural de **N(t)** en función del tiempo. Al aplicar logaritmo a la expresión (1) se obtiene:

$$\ln (N(t)) = -\lambda t + \ln (N_0) \qquad (2)$$

expresión que representa una recta cuya pendiente es $-\lambda$ y su intercepto $\ln (N_0)$.

La relación entre la constante λ y la vida media τ, se obtiene de la definición de vida media, es decir, hacer que en el tiempo $t = \tau$ el número de partículas sea la mitad que las del tiempo cero, esto es:

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda\tau} \qquad (3)$$

se obtiene:

$$\tau = \ln (2) / \lambda \qquad (4)$$

El modelo:

El modelo consiste en suponer que los dados son los núcleos radioactivos y que al salir determinado número (por ejemplo el número 5) se considerará que el núcleo emitió y se trasmuta, es decir deja de ser el núcleo inicial y por ende se retiran esos dados (Ref. [1]).

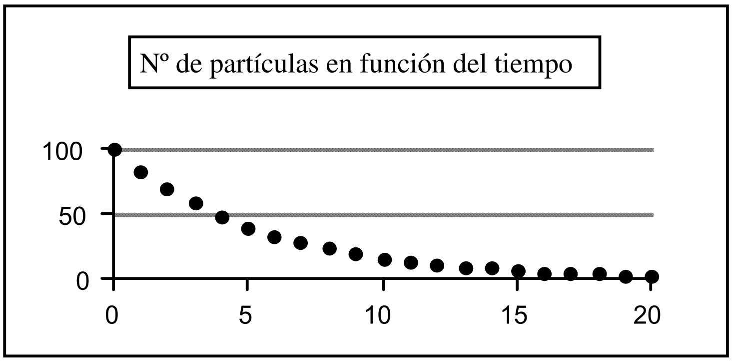
Al lanzar una cantidad grande de dados N_0, luego del primer lanzamiento quedará, según nuestro ejemplo, un sexto menos, es decir 5/6 del valor inicial. Al lanzarlos nuevamente se espera que nuevamente se reduzca en 1/6 pero de la cantidad de ahora, es decir, 1/6 de 5/6; y así sucesivamente. La tabla adjunta representa el valor esperado para el número de dados en función del número del lanzamiento respectivo, en que el número inicial de dados se consideró de cien.

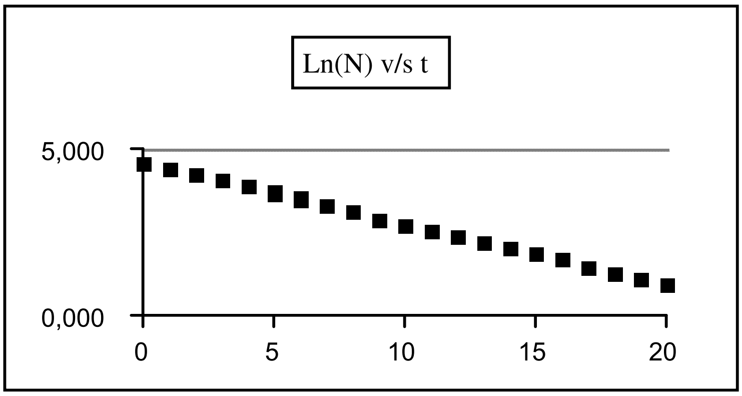
En el caso del ejemplo la probabilidad es 1/6, sin embargo puede considerarse otras situaciones, por ejemplo:

Que aparezca determinado número	P = 1/6
Que el número sea par	P = 1/2
Que el número sea mayor que 4	P = 1/3

Nótese que el número de dados representa al número de núcleos que sobrevive, y el tiempo corresponde al número de lanzamientos. Ahora si calculamos el logaritmo del número de dados y lo graficamos en función del tiempo (que viene representado por el número de lanzamientos) obtendremos una recta que corresponde a la expresión (2). Como es de esperar, el punto de corte con el eje de las ordenadas corresponde al logaritmo del número inicial de partículas y la pendiente a la constante λ, la que se relaciona con la probabilidad de decaer que tiene cada dado.

t	N(t)	t	Ln (N)
lanzam.	Nº dados		
0	100	0	4,605
1	83	1	4,423
2	69	2	4,241
3	58	3	4,058
4	48	4	3,876
5	40	5	3,694
6	33	6	3,511
7	28	7	3,329
8	23	8	3,147
9	19	9	2,964
10	16	10	2,782
11	13	11	2,600
12	11	12	2,417
13	9	13	2,235
14	8	14	2,053
15	6	15	1,870
16	5	16	1,688
17	5	17	1,506
18	4	18	1,323
19	3	19	1,141
20	3	20	0,959





Para comparar el valor de la constante de decaimiento medido del gráfico **ln(N) v/s t** con el esperado, consideremos la siguiente situación:

en **t = 0** se tendrá N_0 partículas y puesto que la probabilidad de emitir es **P**, entonces luego de un lanzamiento se tendrá $N_1 = N_0 (1-P)$. Al cabo de dos lanzamientos será $N_2 = N_1 (1-P) = N_0 (1-P)^2$ y así sucesivamente. Luego de **J** lanzamientos se tendrá:

$$Nj = N_0 (1 - P)^j \tag{5}$$

al aplicar logaritmo natural a la expresión anterior tenemos:

$$\ln (N_j) = j \ln (1-P) + \ln (N_0) \tag{6}$$

y para la pendiente se tiene:

$$d(\ln N_j)/dj = \ln (1-P) \tag{7}$$

Comparando ahora la expresión (2) con la (6), resulta fácil concluir que $-\lambda = \ln (1-P)$. Relación que permite comparar el valor medido en el gráfico $-\lambda$ con el valor esperado $\ln (1-P)$.

Por ejemplo, si elegimos que se retiran los dados que salen con número par, la probabilidad es

1/2, por lo cual el valor esperado para la constante de desintegración es:

$$\lambda = \ln(1-1/2) = -0{,}693147$$

Si en cambio consideramos como suceso cuando sale o un seis o un uno, la probabilidad es 1/3 y para la constante de desintegración se tiene:

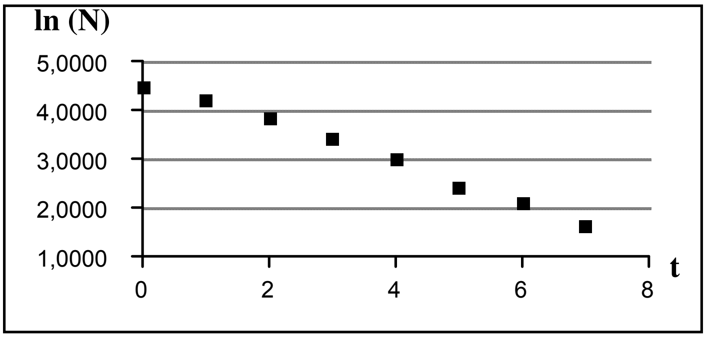
$$\lambda = \ln(1-1/3) = -0{,}405465$$

Un par de ejemplos experimentales:

1.- A modo de ejemplo consideremos el lanzamiento de 90 dados y todos los que salgan con un número uno o seis hacia arriba consideraremos que han decaído y los sacaremos al realizar el lanzamiento siguiente.

En este caso la probabilidad de que un átomo decaiga en un lanzamiento es P = 1/3 y por lo tanto la constante de desintegración teórica sería $\lambda = \ln(1-1/3) = -0{,}405465$

t	²N/²t	N(t)		t	ln(N)
0	0	90			4,4998
1	22	68			4,2195
2	22	46			3,8286
3	15	31			3,4340
4	11	20			2,9957
5	9	11			2,3979
6	3	8			2,0794
7	3	5			1,6094



Aplicando mínimos cuadrados para rectificar la curva graficada se obtiene la expresión:

$$\ln(N) = (-0{,}42 \pm 0{,}01)\, j + (4{,}62 \pm 0{,}06)$$

Al comparar el valor experimental para la pendiente, vemos que difiere en menos de un 5% del valor esperado. Además el valor esperado del intercepto 4,50 coincide con el obtenido 4,62±0,06 dentro del margen de error experimental.

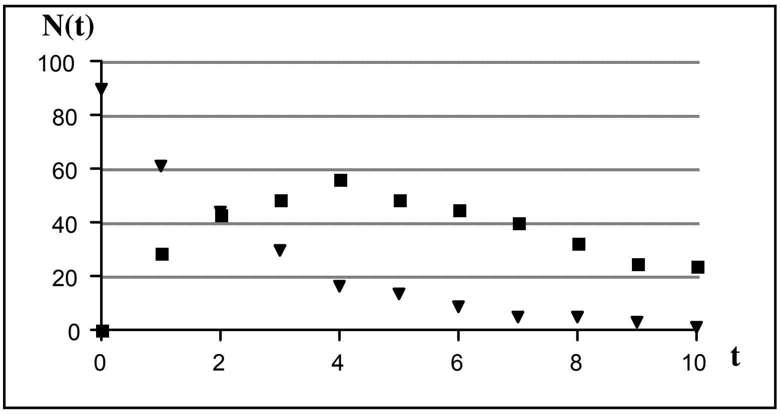
2.- Existen muchos elementos radioactivos que al emitir, el nuevo elemento que se forma también es radioactivo y posee su propia vida media. En este caso, mientras hay un elemento emitiendo se va formando otro que también emite radiación. En la práctica ambas radiaciones son perfectamente distinguibles puesto que poseen diferente energía (Ref. [3]).

Esta situación también puede ser representada en este modelo, sólo que se requiere dados de dos colores, por ejemplo unos blancos y otros negros. Así se comienza con cierta cantidad de dados blancos (90 por ejemplo) y luego al salir el o los números esperados, se considera que emiten, por lo que se procede a sustituirlos por dados del otro color (negros en este caso), los que a su vez se eliminan luego de salir el evento esperado.

Veamos esto con un ejemplo. Comencemos con los dados blancos y consideramos que un elemento decae cuando aparece un número uno o seis. En ese caso es cambiado por un dado negro, el cual a su vez también puede decaer y consideramos que lo hace si sale en él el número 4.

Las mediciones para este caso se resumen en la siguiente tabla♦:

	Dados Blancos		Dados Negros	
t	**$^2N/^2t$**	**N(t)**	**$^2N/^2t$**	**N(t)**
0	0	90	0	0
1	29	61	0	29
2	17	44	3	43
3	14	30	8	49
4	14	16	7	56
5	3	13	10	49
6	4	9	8	45
7	4	5	9	40
8	0	5	8	32
9	2	3	9	25
10	2	1	3	24



En el gráfico se representa con triángulos el número de dados blancos, nótese que disminuyen rápidamente con el tiempo, mientras que con cuadrados se representa el número de dados negros, los que inicialmente son cero, luego aumentan y posteriormente disminuyen.

Conclusiones:

Para alumnos de Enseñanza Básica es interesante porque permite graficar valores medidos, además de acercarse al concepto de vida media estimando en qué tiempo la curva N v/s t disminuye a la mitad del valor inicial.

Para alumnos de Enseñanza Media es interesante porque, además de ayudar a profundizar conceptos físicos, también es útil para mostrar una aplicación de los logaritmos y posible de ser contrastada experimentalmente, en este caso con un experimento estadístico. También resulta interesante para obtener la función que describe una recta ya que el log(N) en función del tiempo resulta en general una *buena* recta.

Finalmente, el hecho de que permita contrastar valores experimentales y teóricos hace que el experimento en sí permita la aplicación del método científico a una situación estadística y empleando material de bajo costo.

Bibliografía:

[1] Bussenius, Walter. *El Gravitón*. Boletín de Física del Área de Física de la Universidad de Talca. Nº 12. Noviembre 1996.

[2] Beiser, Arthur. *Conceptos de Física Moderna*. Editorial Mc Graw-Hill. Mexico 1975.

[3] Wichmann, Eyvind. *Física Cuántica*. Editorial Reverté. Colección Berkeley Vol. 4. España 1972.

♦ En la tabla ^2x significa Δx.