Construcciones de cuadriláteros

Heriberto Cisternas Escobedo[1]

Colegio Constitución
Departamento de Matemática

En la resolución de un problema de construcción comenzamos por suponer resuelto el problema; aún sin instrumentos, trazamos una figura y suponemos que ella satisface las condiciones del enunciado. Inmediatamente, valiéndonos de otras operaciones preparatorias y con la ayuda de las relaciones que enlazan a los datos conocidos con las incógnitas, procuraremos descubrir alguna construcción que, realizada como corresponde con la regla y el compás, sobre la base de los datos de la cuestión, nos conduzca a la solución pedida directamente o por medio de las simplificaciones.

Para construir un cuadrilátero debemos tener algunas consideraciones especiales y en algunos casos, trasladar el problema a una construcción de triángulos, así por ejemplo; una diagonal divide a un cuadrilátero en dos triángulos. Para construir uno de esos triángulos se requieren tres datos. Construido el primer triángulo se obtiene la diagonal, que es un lado del segundo triángulo. Por lo tanto, para dibujar este último triángulo se necesitan sólo dos elementos nuevos. Para construir un trapezoide se requieren, por consiguiente, cinco elementos.

Cada condición que se imponga al cuadrilátero disminuye el número de elementos que se requieren conocer. Así, por ejemplo para un trapecio bastará con cuatro, para un trapecio isósceles y para un paralelogramo bastará con tres, para un rectángulo o rombo bastará con dos, y para un cuadrado será suficiente con un elemento. Problemas sobre cuadriláteros quedan bien determinados por cinco elementos.

Problemas relativos a polígonos de n lados quedan bien determinados por 2n-3 elementos o condiciones independientes. Todo polígono de n lados puede descomponerse por las n-3 diagonales que parten del mismo vértice, en n-2 triángulos; el primero de estos triángulos restantes queda bien determinado por 3 elementos, cada uno de los n-3 triángulos restantes por 2 elementos independientes; por consiguiente, se necesitan 3+2(n-3)=2n-3 elementos.

En cuanto a la construcción de cuadriláteros, tengamos en cuenta algunas condiciones y propiedades:

1. Si los vértices no resultan directamente de los datos, consideremos primero uno de los triángulos en que una o las dos diagonales dividen el cuadrilátero.
2. Con tres ángulos queda determinado el cuarto.
3. En el cuadrilátero inscrito los ángulos opuestos son suplementarios, y la circunferencia que pasa por tres de los vértices, pasa también por el cuarto.
4. En el cuadrilátero circunscrito la suma de los lados opuestos es igual la suma de los otros dos.

[1] e-mail: hericisternas@gmail.com

5. En el trapecio inscrito, los lados no paralelos son iguales; también se verifica que $e = f$, $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$. Con un ángulo quedan determinados los otros tres.
6. Las diagonales se definirán por: $\overline{AC} = e$ y $\overline{BD} = f$
7. En el trapecio circunscrito, la altura es igual al diámetro de la circunferencia inscrita, es decir, $h = 2\rho$.
8. En el paralelogramo, la normal bajada desde C o D a AB es la altura h y cateto en un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un lado o una diagonal del paralelogramo.

Nota: En la construcción de cuadriláteros sólo me ocuparé de figuras convexas, es decir, en aquellas en las cuales todos los ángulos interiores miden menos de 180º. Por tal razón, en la discusión de problemas de construcción, no serán considerados como solución a aquellos casos de cuadriláteros no convexos.

SIMBOLOS Y NOTACIONES

$\odot(O,r)$	: Circunferencia de centro O y radio r.
$\overline{AB} \to B$	: A unido con B y prolongado más allá de B.
$\measuredangle(a,f)$	: Angulo de lados a y f.
$\square$ABCD	: Cuadrado ABCD.

En el cuadrilátero se denotará:

- Los vértices por las letras A, B, C y D.
- Los lados por a, b, c y d, empezando por $\overline{AB}$ y recorriendo la figura en el orden establecido.
- Los ángulos por α, β, γ y δ, siendo vértices los puntos A, B, C y D, respectivamente.
- Las diagonales por e y f, partiendo respectivamente de los vértices A y B.
- El punto de intersección de las diagonales por E y el ángulo que ellas forman y que se opone al lado “a” por ξ.
- Si se trata de un paralelogramo, las alturas por h_a y h_b siendo, respectivamente, perpendiculares a los lados a y b.
- Si se trata de un trapecio, la altura (distancia entre las bases) por h.
- Si existe circunferencia inscrita, su radio por ρ, y si la hay, circunscrita, por r.

PROBLEMAS RESUELTOS

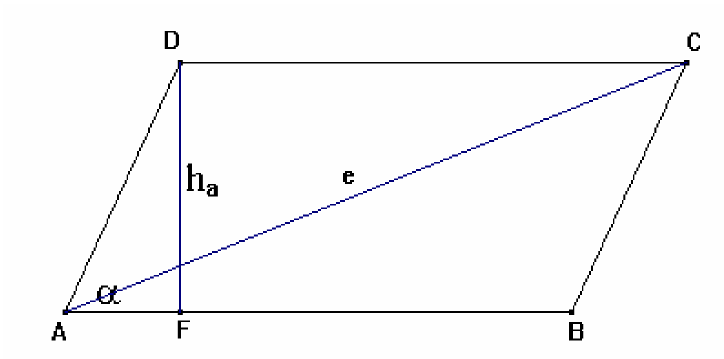
Problema 1: Construir un paralelogramo, conocidos: e, h_a, α.

Análisis: Sea ABCD el paralelogramo pedido, donde:

$\overline{AC} = e$

$\overline{DE} = h_a$

$\angle DAB = \alpha$

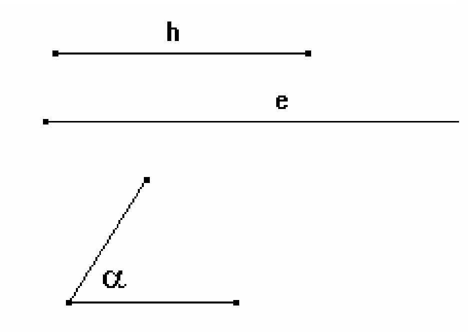


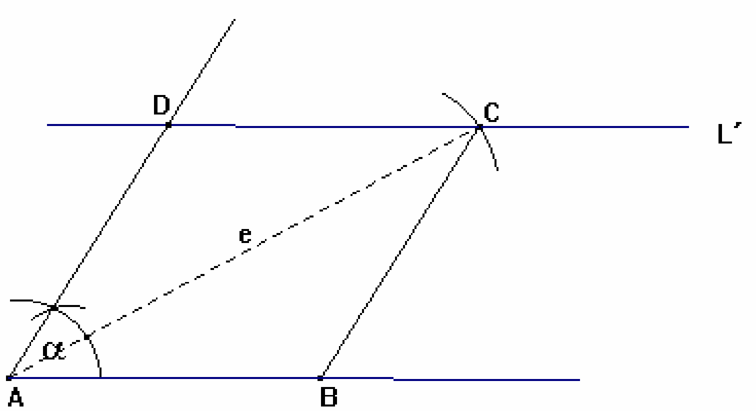
Denotaré a AB como lado fijo del ángulo α y a AD lado libre del ángulo α.

1. A queda determinado por el vértice del ángulo α.
2. D se encuentra en la intersección del lado libre del ángulo α y la paralela al lado fijo a una distancia $\mathbf{h}_a$ (trazada al lado del ángulo).
3. C se encuentra en la intersección de la paralela al lado fijo de α y ⊙(A,e). (Circunferencia de centro en A y radio e).
4. B se encuentra en la intersección del lado fijo de α y la paralela a AD por C.

Construcción:
1. Trazar un rayo de origen A.
2. Trazar una paralela L´ a una distancia $\mathbf{h}_a$ del rayo.
3. Copiar el ángulo α sobre el rayo con vértice en A, con un lado en el rayo, cuyo lado libre intercepta a la paralela L´en D.
4. Construir ⊙(A,e), que encuentra a la paralela L´en C.
5. Trazar por C la paralela a AD,
6. Obtener el vértice B, punto de intersección del lado fijo de α, sobre el rayo de origen A.

Datos del Problema:





Demostración:
Rayos de origen A, por construcción.
L´// AB, por construcción

$\measuredangle$DAB = α; por construcción

⊙(A,e) determina $\overline{AC}$, por construcción.
BC // AD, por construcción.

Luego, ABCD es el paralelogramo pedido y es solución a los datos del problema.

Discusión:

- Si e > h, entonces el problema tiene una solución.
- Si e ≤ h, entonces el problema no tiene solución.

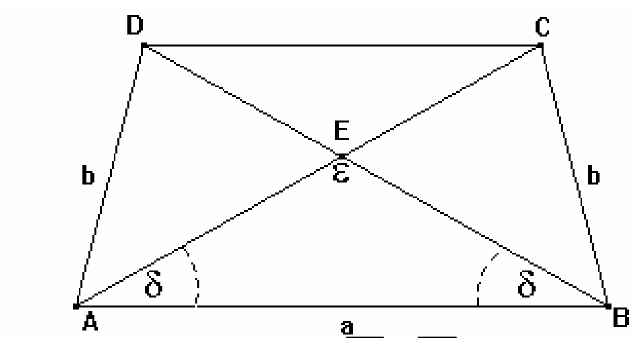
Problema 2: Construir un trapecio isósceles, dados: a, b, ε.

Análisis: Sea ABCD el trapecio isósceles pedido; donde:

$\overline{AB} = a$

$\overline{BC} = b$

$\angle BEA = \varepsilon$



$\overline{EA} = \overline{EB}$

En el ΔEAB isósceles; se tiene: $\delta = 90º - \dfrac{\varepsilon}{2}$

1. Los vértices A y B están determinados por el ΔEAB constructible por el criterio de congruencia A.L.A.
2. C se encuentra en la intersección del lado libre del ángulo δ de vértice A y el arco de ⊙(B,b).
3. D se encuentra en la intersección del lado libre del ángulo δ de vértice B y arco de ⊙(A,b).

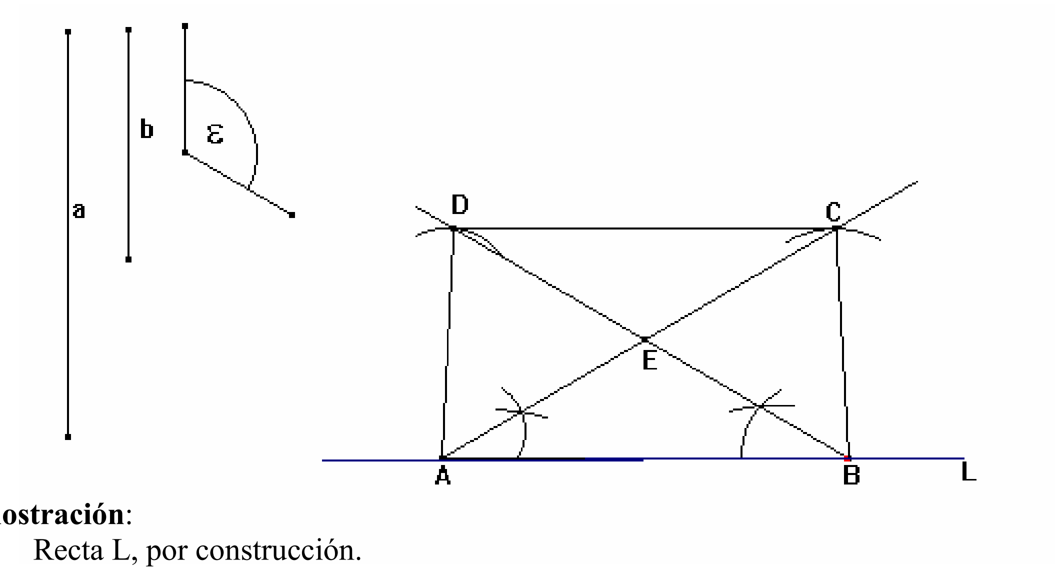
Construcción:

1. Trazar una recta L.
2. Copiar sobre L la magnitud "a", que determina los vértices A y B.
3. Copiar $\delta = 90º - \dfrac{\varepsilon}{2}$ sobre L, con vértice en A.
4. Copiar $\delta = 90º - \dfrac{\varepsilon}{2}$ sobre L, con vértice en B.
5. Obtener E en la intersección de los lados libres del ángulo δ.

6. Describir arco de ⊙(B,b) que intercepta a la prolongación de $\overline{AE} \rightarrow E$ en C.
7. Describir arco de ⊙(A,b) que intercepta a la prolongación de $\overline{BE} \rightarrow E$ en D.
8. Unir A con D, B con C y C con D.

   Luego, ABCD es el trapecio isósceles pedido.

Datos del Problema:



Demostración:

Recta L, por construcción.

$\overline{AB} = a$, por construcción

$\measuredangle$EAB = $\delta = 90º - \frac{\varepsilon}{2}$, por construcción

$\measuredangle$ABE = $\delta = 90º - \frac{\varepsilon}{2}$, por construcción.

$\overline{BC} = b$, por construcción.

$\overline{AD} = b$, por construcción.

Luego, ABCD es el trapecio isósceles pedido y corresponde a los datos del problema.

Discusión:

El ΔEAB es siempre constructible por el criterio A.L.A.

Sea $\mathbf{h_a}$ = altura del ΔEAB (distancia desde A a la recta BE).

- Si $\varepsilon > 90º \wedge b > h_a \wedge b < \overline{AE}$, el problema tiene dos soluciones.
- Si $\varepsilon > 90º \wedge b > h_a \wedge b = \overline{AE}$, el problema tiene una solución.
- Si $\varepsilon > 90º \wedge b = h_a$, el problema tiene una solución.
- Si $\varepsilon = 90º \wedge b > h_a$, el problema tiene una solución.
- Si $\varepsilon \geq 90º \wedge b < \overline{AE}$, el problema no tiene solución.
- Si $\varepsilon < 90º \wedge b \leq \overline{AE}$, el problema no tiene solución

- Si $\varepsilon < 90^\circ \;\wedge\; b > \overline{AE}$, el problema tiene una solución.

Problema 3: Construir un cuadrilátero, dados: a, e, α, γ, δ.

Análisis:

Sea ABCD el cuadrilátero pedido:

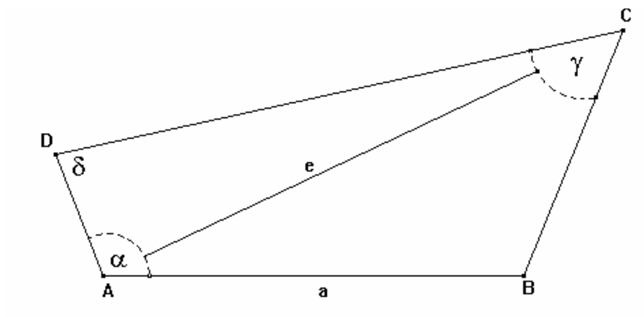
$\overline{AB} = a$

$\overline{AC} = e$

$\angle DAB = \alpha$

$\angle BCD = \gamma$

$\angle CDA = \delta$



Se tiene: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$

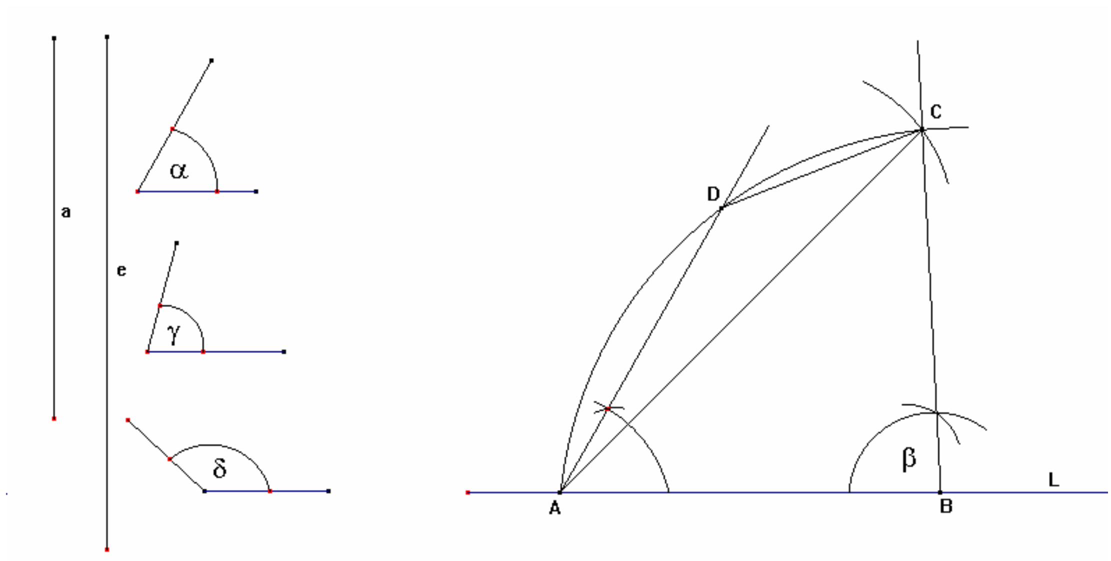
$\beta = 360^\circ - (\alpha + \gamma + \delta)$

1. La magnitud "a" determina los vértices A y B.
2. El vértice C se encuentra en la intersección del arco de $\odot(A,e)$ y el lado libre del ángulo β. (AB lado fijo del ángulo β).
3. El vértice D se encuentra en la intersección del arco capaz de δ y el lado libre del ángulo α. (AB lado fijo del ángulo α).

Construcción:
1. Trazar una recta L.
2. Copiar "a" sobre L, que determina los vértices A y B.
3. Copiar $\beta = 360^\circ - (\alpha + \gamma + \delta)$ sobre L con vértice en B.
4. Describir arco de $\odot(A,e)$ que intercepta al lado libre del ángulo β en C. Unir A con C.
5. Describir arco capaz de δ, con cuerda AC = e
6. Copiar el ángulo α sobre la recta L con vértice en A, que intercepta al arco capaz en D.
7. Unir C con D, obteniendo así el cuadrilátero ABCD.

Luego, ABCD es el cuadrilátero pedido.

Datos del Problema:



Demostración:
Recta L, por construcción
$\overline{AB} = a$, por construcción
$\measuredangle ABC = \beta = 360º - (\alpha + \gamma + \delta)$, por construcción
$\overline{AC} = e$, por construcción.
Arco capaz de δ con cuerda AC = e, por construcción.
$\measuredangle DAB = \alpha$, por construcción.
Luego, ABCD es el cuadrilátero solución del problema.

Discusión:
Sea ha = altura del ΔABC

- Si $\beta < 90º \wedge e > h_a \wedge e < a \wedge \alpha > \measuredangle CAB$, hay dos soluciones.
- Si $\beta < 90º \wedge e > h_a \wedge e \geq a \wedge \alpha > \measuredangle CAB$, hay una solución.
- Si $\beta < 90º \wedge e = h_a \wedge \alpha > \measuredangle CAB$, hay una solución.
- Si $e < h_a$, no hay solución.
- Si $\beta > 90º \wedge e > a \wedge \alpha > \measuredangle CAB$, hay una solución.

<u>Problema 4</u>: Construir un cuadrilátero, dados: a, e, f, $\measuredangle(a,e)$, $\measuredangle(a,f)$.

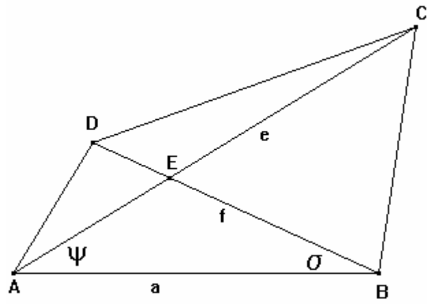
Análisis: Sea ABCD el cuadrilátero pedido.

Sea $\measuredangle(a , e) = \psi$
Sea $\measuredangle(a , f) = \sigma$

$\overline{AB} = a$

$\overline{AC} = e$

$\overline{BD} = f$



La posición de los vértices del cuadrilátero está determinado por las siguientes construcciones:

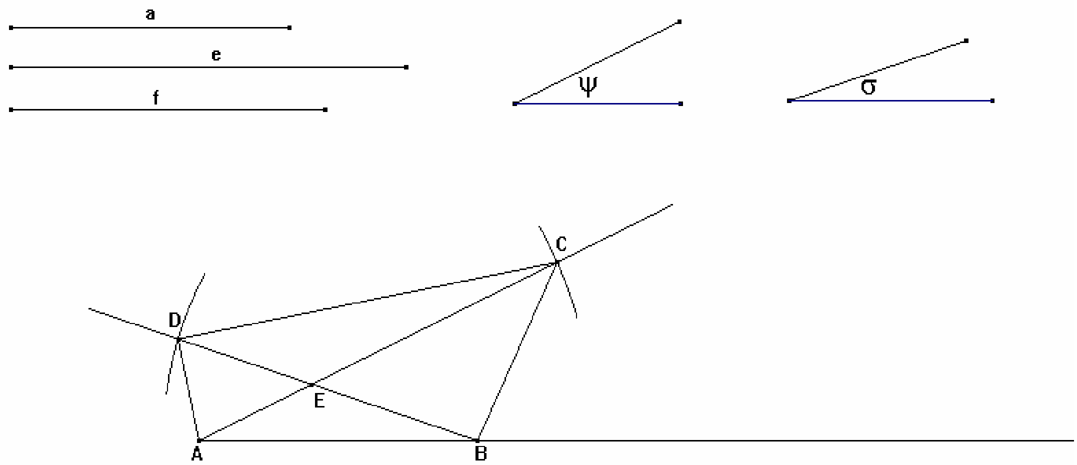
1. El ΔABE constructible por criterio de congruencia A.L.A, determina los vértices A y B.
2. El vértice C se encuentra sobre la prolongación de $\overline{AE} \to E$, a una distancia e del vértice A.
3. El vértice D se encuentra sobre la prolongación de $\overline{BE} \to E$, a una distancia f del vértice B.

Construcción:

1. Trazar un rayo de origen A.
2. Copiar “a” sobre el rayo, se determina el vértice B.
3. Copiar ψ sobre el rayo con vértice en A.
4. Copiar σ sobre el rayo con vértice en B.
5. Obtener E en la intersección de los lados libres de ψ y σ.
6. Copiar “e” sobre la prolongación de $\overline{AE} \to E$ que determina el vértice C.
7. Copiar “f” sobre la prolongación de $\overline{BE} \to E$ que determina el vértice D.
8. Unir A con D, D con C y B con C.

Luego, el cuadrilátero ABCD es la solución al problema.

Datos del problema:



Demostración:

Rayo de origen A, por construcción.
$\overline{AB} = a$, por construcción.
∡EAB = ψ, por construcción.
∡ABE = σ, por construcción.
$\overline{AC} = e$, por construcción.
$\overline{BD} = f$, por construcción.

Luego, ABCD es el cuadrilátero solución del problema.

Discusión:

El ΔABE se puede construir por el criterio A.L.A siempre que ψ + σ < 180º, y de él dependen las posiciones de los vértices C y D.

- Si $e > \overline{AE} \wedge f > \overline{BE}$, el problema tiene una única solución.
- Si $e \leq \overline{AE} \vee f \leq \overline{BE}$, el problema no tiene solución.

Problema 5: Construir un cuadrilátero inscrito, dados: b, e, α , β.

Análisis: Sea ABCD el cuadrilátero inscrito en ⊙(O).

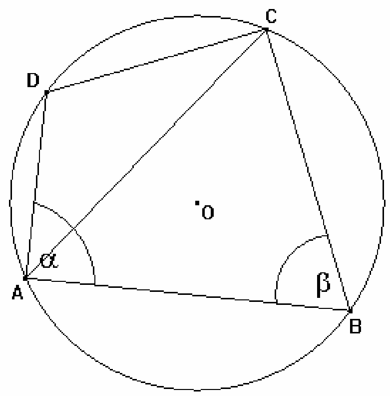
Sean:

$\overline{AC} = e$

$\overline{BC} = b$

$\angle DAB = \alpha$

$\angle ABC = \beta$



La posición de los vértices del cuadrilátero están determinados por las siguientes construcciones:

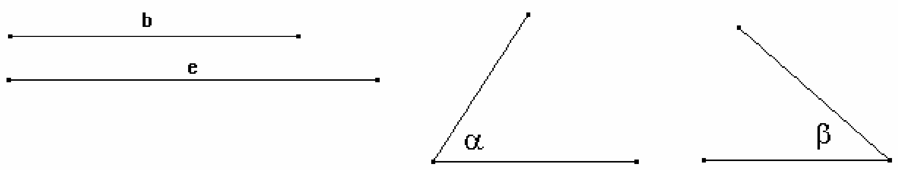
1. Los vértices A, B y C, están determinados por el ΔABC, constructible por arco capaz de β con cuerda e.
2. El vértice D se encuentra en la intersección de la circunferencia que subtiende el arco capaz de β y el lado libre de α (AB lado fijo de α).

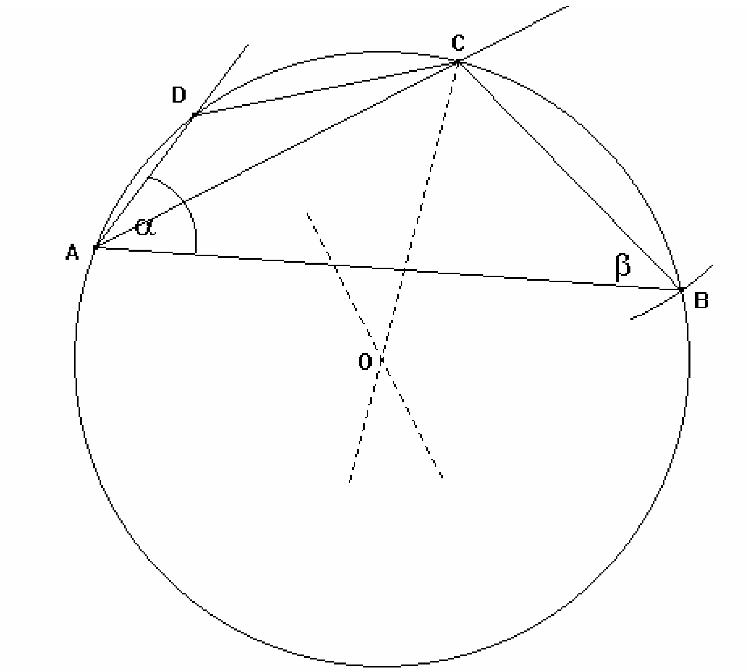
Construcción:

1. Trazar un rayo de origen A.
2. Copiar "e" sobre el rayo, se determina el vértice C.
3. Describir arco capaz de β con cuerda AC = e.
4. Describir arco capaz de ⊙(C,b), que intercepta el arco capaz de β en B.
5. Unir A con B y B con C.
6. Copiar sobre AB el ángulo α, con vértice en A.
7. Obtener D en la intersección del lado libre de α y la circunferencia que subtiende el arco capaz de β.
8. Unir D con C.

   Luego, ABCD es el cuadrilátero solución al problema.

Datos del Problema:





Demostración:

Rayo de origen A, por construcción.
$\overline{AC} = e$, por construcción
Arco capaz de β con cuerda AC, por construcción.
$\overline{BC} = b$, por construcción.
D se encuentra sobre la circunferencia que subtiende el arco capaz de β, pues, cuadrilátero ABCD es inscriptible; ∡DAB=α, por construcción.

Luego, ABCD es el cuadrilátero inscrito y corresponde a los datos del problema.

Discusión:

Del ΔABC determinado por el arco capaz de β con cuerda AC = e, depende la posición del vértice D.

- Si $e > b \land \alpha >$ ∡CAB, el problema tiene una solución
- Si $e \leq b$, el problema no tiene solución.
- Si $\alpha \leq$ ∡CAB, el problema no tiene solución.

<u>Problema 6</u>: Construir un cuadrilátero circunscrito, dados: ρ, a, b, β.

Análisis:

Sea ABCD el cuadrilátero circunscrito en la ⊙(O,ρ)

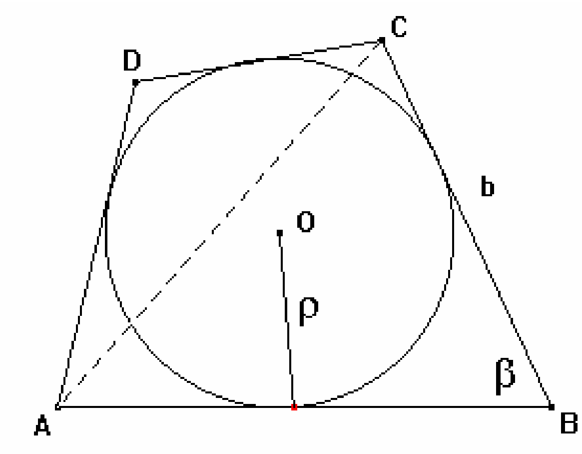
Sean:

$\overline{AB} = a$

$\overline{BC} = b$

$\angle ABC = \beta$

$\overline{OE} = \rho$



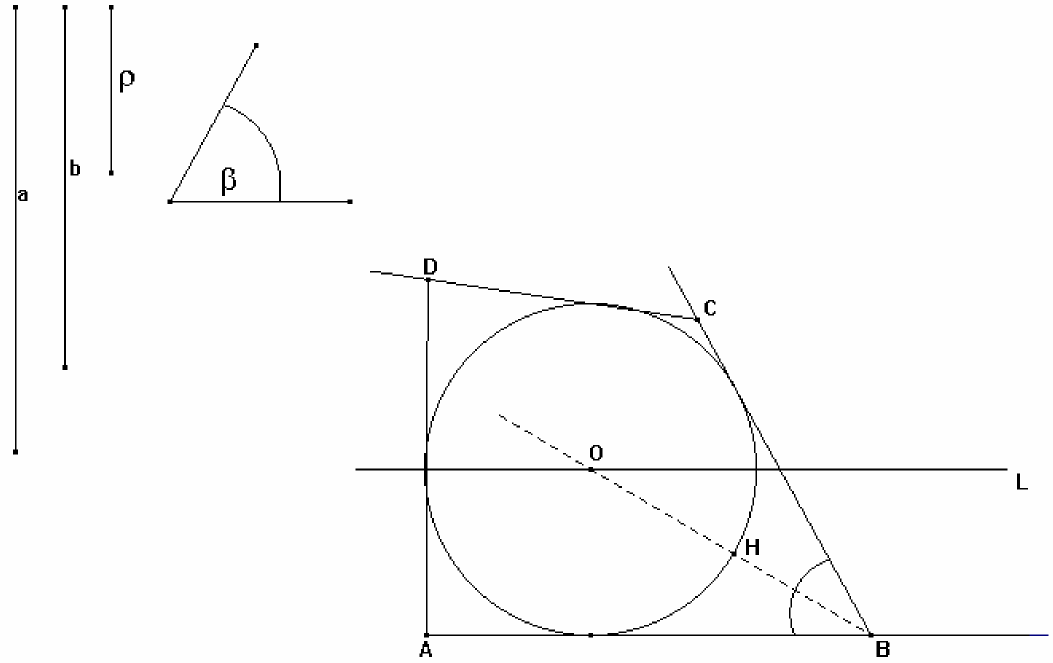
1. Los vértices A, B y C están determinados por el ΔABC, constructible por el criterio L.A.L (a, β, b).
2. El vértice D está determinado por la intersección de las tangentes a la ⊙(O,ρ) desde los vértices A y C.
3. El centro de la circunferencia de radio ρ, se encuentra en la intersección de la bisectriz de β y la paralela a AB a distancia ρ.

Construcción:

1. Trazar un rayo de origen A.
2. Copiar “a” sobre el rayo, se determina B.
3. Copiar β sobre el rayo con vértice en B.
4. Copiar “b” sobre el lado libre de β, se determina C.
5. Trazar la bisectriz de β.
6. Trazar la paralela L al lado “a”, a una distancia ρ que intercepta a la bisectriz de β en O.
7. Describir ⊙(O,ρ).
8. Trazar desde A y C las tangentes a la ⊙(O,ρ).
9. Obtener D en la intersección de las tangentes desde A y C, que no contienen los lados del ΔABC.

   Luego, ABCD es el cuadrilátero circunscrito a la ⊙(O,ρ).

Datos del Problema:



Demostración:

Rayo de origen A, por construcción.
$\overline{AB} = a$, por construcción.
∡ABC=β, por construcción.
$\overline{BC} = b$, por construcción.
BO bisectriz de β, por construcción.
L // AB a distancia ρ, por construcción.
⊙(O, ρ), por construcción.
AD tangente a ⊙(O, ρ), por construcción.
CD tangente a ⊙(O, ρ), por construcción.

Luego, ABCD es el cuadrilátero pedido y corresponde a los datos.

Discusión:
ΔABC siempre es constructible.
La obtención de un cuadrilátero convexo es favorable si el vértice D se encuentra a distinto semiplano con respecto a la recta AC del vértice B. Esto ocurre si $b_\beta < 2\rho + \overline{HB}$, es decir,

$$b_\beta < \rho + \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{a + b - \overline{AC}}{2}\right)^2}$$

Problema 7: Construir un trapecio circunscrito, dados: ρ, a, b.

Análisis:

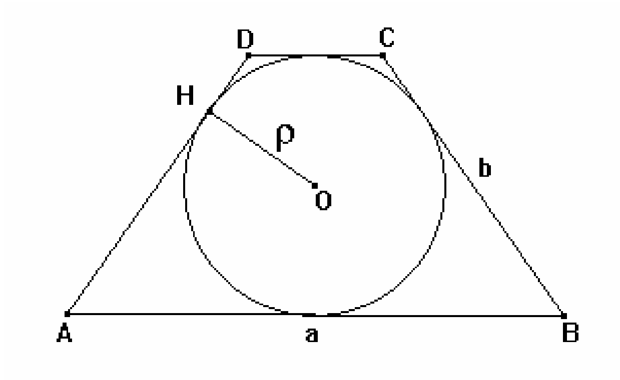
Sea ABCD el trapecio circunscrito a la ⊙(O, ρ).

Sean:

$\overline{AB} = a$

$\overline{BC} = b$

$\overline{OH} = \rho$



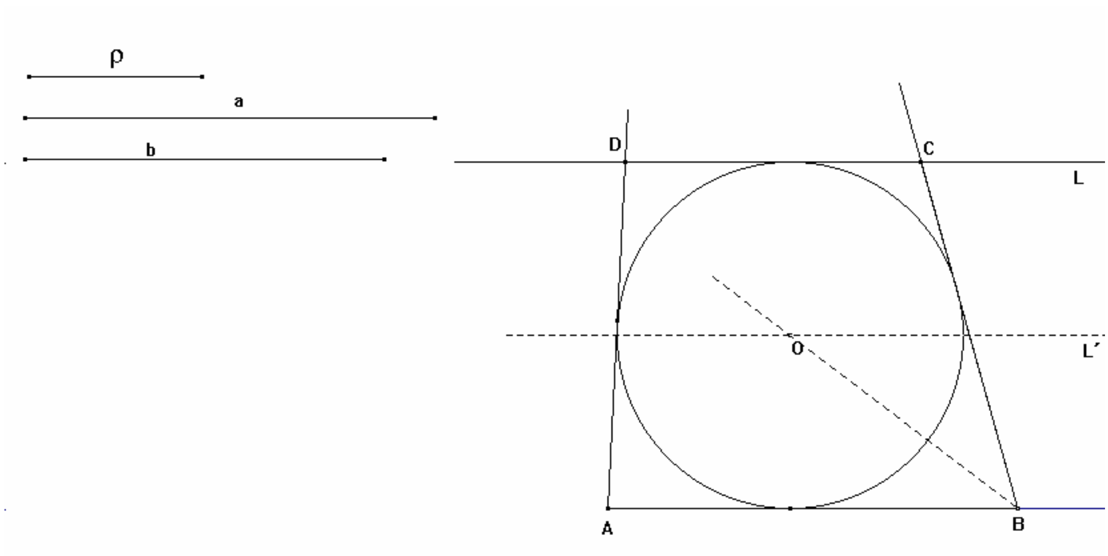
La posición de los vértices del trapecio están determinados por las siguientes construcciones:

1. Los vértices A y B se determinan por $\overline{AB} = a$.
2. El vértice C se encuentra ubicado en la intersección de la paralela a AB a distancia 2ρ y arco de ⊙(B,b).
3. El vértice D se encuentra ubicado en la intersección de la paralela a AB a distancia 2ρ y la tangente desde el vértice A a la ⊙(O,ρ).
4. El centro O de la circunferencia se encuentra en la intersección de la paralela a AB a una distancia ρ y la bisectriz de β.

Construcción:

1. Trazar un rayo de origen A.
2. Copiar "a" sobre el rayo, se determina el vértice B.
3. Trazar una recta L paralela a AB, a distancia 2ρ.
4. Describir arco de ⊙(B,b), que encuentra a la paralela L en C.
5. Unir B con C.
6. Trazar la bisectriz del ∡ABC=β.
7. Trazar L´ paralela a AB a distancia ρ, que intercepta a la bisectriz de β en O.
8. Describir ⊙(O,ρ).
9. Trazar las tangentes a ⊙(O,ρ) desde A, que encuentra a L en D.
   Luego, ABCD es el trapecio pedido.

Datos del problema:



Demostración:
Rayo de origen A, por construcción.
$\overline{AB} = a$, por construcción.
L // AB a distancia 2ρ, por construcción.
$\overline{BC} = b$, por construcción.
BO bisectriz de β, por construcción.
L´ // AB a distancia ρ, por construcción.
⊙(O,ρ), por construcción.
Luego, ABCD es el trapecio solución.

Discusión:

- Si $b > 2\rho \wedge \overline{BO} < a \wedge \overline{BO} < b$, el problema tiene dos soluciones.
- Si $b = 2\rho \wedge \overline{BO} < a \wedge \overline{BO} < b$, el problema tiene una solución.
- Si $b < 2\rho$, el problema no tiene solución.
- Si $\overline{BO} \geq a \vee \overline{BO} \geq b$, el problema no tiene solución.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Construir un cuadrado, dado su perímetro.
2. Construir un cuadrado, dada su diagonal.
3. Construir un rectángulo, dados la diagonal y el ángulo formado por las diagonales.
4. Construir un paralelogramo, dados h_a y h_b.
5. Construir un trapecio isósceles, dados:
   a) a, b, e.
   b) a, h, α.

6. Construir un cuadrilátero, dados:
   a) a, b, d, α.
   b) A, e, ξ, $\measuredangle$(a,f).
   c) A, b, β, ξ.
7. Construir un cuadrilátero inscrito, dados:
   a) r, a, b, γ
   b) a, b, e, f.
   c) e, f, α, $\measuredangle$(a,f).
8. Construir un cuadrilátero circunscrito, dados:
   a) ρ, α, β, γ
   b) a, b, c, e.
   c) a, b, α, f.

Bibliografía

[1] Cisternas Escobedo, Heriberto. *Construcciones Planimétricas*. Seminario para optar al título de Profesor de Estado en Matemática. Prof. Guía Sra. Ana Fuenzalida C. Universidad de Talca. 1986.

[2] Courant Richard y Robins Herbert. *¿Qué es la matemática?*. Editorial Aguilar: Madrid 1962. Tercera edición