Introducción a los fractales

Ramón Garrido Vásquez[1]

Instituto Regional del Maule

Resumen

Este trabajo tiene como propósito presentar el tema de *fractales* en un nivel básico, enfatizando los denominados *fractales* clásicos, su construcción geométrica y la propiedad de autosimilitud que los caracteriza.

Introducción

Existen muchas formas en la naturaleza que no es posible modelar con elementos de la geometría euclidiana. Por ejemplo, la forma de una nube, de una montaña, de una costa o de un árbol, porque ni las nubes son esféricas, ni las montañas cónicas, ni las costas circulares, ni el tronco de un árbol cilíndrico, ni un rayo es rectilíneo. Estas formas que existen en la naturaleza, presentan estructuras muy irregulares y fragmentadas, y representan un desafío a los matemáticos y científicos, que la geometría euclidiana no puede resolver.

En la década de los 70 del siglo recién pasado, el matemático polaco Benoit Mandelbrot[2] desarrolla una nueva geometría de la naturaleza y que se empieza a aplicar en una serie de campos. Esta nueva geometría permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamó *fractales*.


Benoit Mandelbrot

Mandelbrot es considerado el padre de los *fractales*. Este matemático recopiló, ordenó y sistematizó los conocimientos de *geometría fractal* desarrollados hasta la década de los setenta, constituyéndose como una nueva geometría.

Esta nueva disciplina, denominada *geometría fractal*, protagoniza hoy múltiples investigaciones en muchos campos de la ciencia.

¿Qué son los *fractales*?

De manera intuitiva, un *fractal* es un objeto casi-geométrico cuya estructura básica se repite a diferentes escalas. Es decir, es una figura que mantiene su forma si se le cambia de escala

[1] Trabajo realizado en el Módulo de Geometría, del Programa Magíster en Enseñanza de las Ciencias, mención Matemática.

[2] *Mandelbrot*, matemático polaco nacido en el año 1924. Ha recibido numerosos honores y premios. En 1985, la *Medalla Barnard*. En 1986, la *Medalla Franklin*. En 1987, el *Premio Alexander von Humboldt*. En 1988, la *Medalla Steinmetz*, la *Medalla Nevada* en 1991, el *Premio Wolf para físicos* en 1993 y el *Premio Japonés para Ciencia y Tecnología* en 2003.

El término *fractal* fue propuesto por el matemático polaco Benoit Mandelbrot en 1975 y deriva del latín *fractus*, que significa quebrado, roto, irregular, o algo no entero, que comprende objetos geométricos que pueden ser descritos en términos de dimensiones no enteras. Algunos de estos objetos ya se conocían desde principios del siglo XX y finales del XIX, como por ejemplo, el llamado *polvo de Cantor*, la *curva de Koch*, entre otros.

Los *fractales* pueden ser generados por un proceso recursivo o iterativo, capaz de producir estructuras auto-similares a cualquier escala de observación.

Una de sus características es la autosimilitud, es decir, pueden dividirse en partes que son copias reducidas del total. Su dimensión es una fracción, a diferencia de las dimensiones de las figuras geométricas euclidianas.

Los *fractales* se presentan en multitud de formas en la Naturaleza desde galaxias, costas marítimas, montañas, bosques, árboles, nubes, relámpagos, y en multitud de procesos físicos como la cristalización, movimiento de partículas en un fluido, electrolisis, etc.

Ejemplos de *fractales* en la naturaleza

Litoral

Coliflor

Coral

Helecho

Fractales geométricos

Entre los *fractales* geométricos, denominados *fractales clásicos* se encuentran: *el polvo de Cantor*, *la curva de Koch*, *el triángulo de Sierpinski*, *la alfombra de Sierpinski*. Estos fractales son generados a partir de una figura geométrica aplicando sucesivamente una acción.

A continuación se presentan algunos fractales geométricos clásicos y la construcción de ellos.

1. *Curva de Koch.*

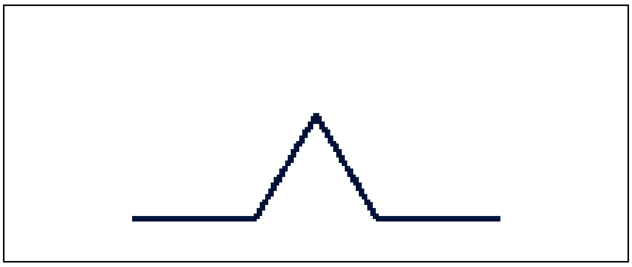
A principios del siglo XX, en el año 1904, el matemático sueco Niels Helge von Koch (1870-1924) estudió la curva que lleva su nombre *Curva de Koch*.

Esta curva se forma a partir de un segmento, repitiendo un proceso de construcción sucesivamente, que se presenta a continuación

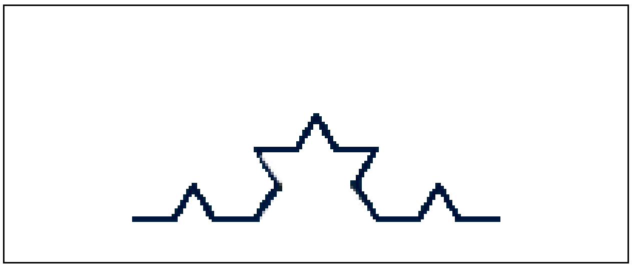
Helge von Koch

Etapa 0 (inicio)
Construir un segmento.

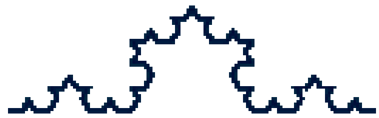
Etapa 1
Dividir el segmento en tres partes iguales. Luego, sustituir el segmento central por dos segmentos, cada uno con longitud igual a la del segmento que se ha quitado.



Etapa 2
Dividir en tres partes iguales, cada uno de los cuatro segmentos obtenidos. Luego, sustituir cada segmento central por dos segmentos de longitud igual a la del segmento extraído.



Etapa 3
Proceder con la construcción señalada anteriormente en cada segmento obtenido. Así, en esta etapa se obtiene la siguiente figura:



Repitiendo el mismo proceso en cada segmento formado, se obtiene la *curva de Koch*.

Observación. Respecto de la *curva de Koch* se puede verificar lo siguiente:

a) La longitud de la curva poligonal obtenida en cada etapa está indicada en la tabla:

Etapa	N° 0	N°1	N°2	N°3	…	N° k	…
Longitud	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{64}{27}$	…	$\left(\frac{4}{3}\right)^k$	…

Luego, la longitud de la curva de Koch (cuando k tiende a infinito) tiende a infinito. Por lo tanto, se puede decir que la curva de Koch es una curva de longitud infinita.

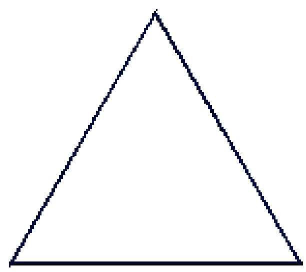
b) La razón entre las longitudes de la curva obtenida en una etapa con la curva precedente es:

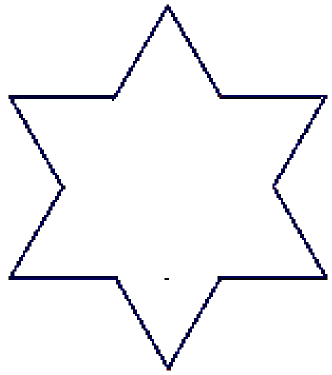
$$\frac{longitud\ nueva}{longitud\ etapa\ anterior} = \frac{4}{3}.$$

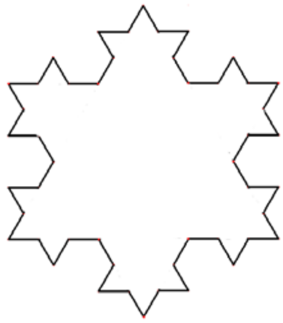
Nota. Una variación de la curva de Koch es la llamada copo de nieve. Esta curva se genera a partir de un triángulo equilátero, levantando en cada lado otro nuevo triángulo equilátero, y así sucesivamente, cuyo proceso de construcción se presenta a continuación.

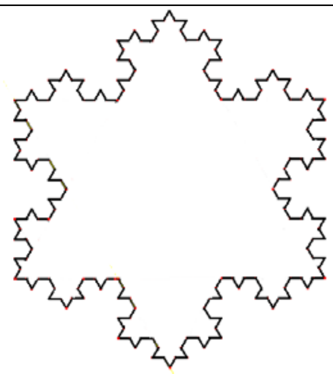
2. *Copo de Nieve de Koch*

Etapa 0 (inicio)
Construir un triángulo equilátero



Etapa 1 Trisectar, o dividir en tres partes iguales, cada lado del triángulo. En cada lado construir hacia el exterior, un triángulo equilátero, siendo uno de sus lados el segmento central del lado respectivo. Luego, quitar el segmento central de cada lado de la etapa anterior.	

Etapa 2 Trisectar cada uno de los doce segmentos obtenidos en la etapa anterior, y repetir la construcción señalada.	

Etapa 3 Procediendo de manera similar sobre cada segmento obtenido, se obtiene la siguiente figura:	

Repitiendo el mismo proceso sucesivamente, se obtiene la curva *Copo de Nieve de Koch*.

Nota. Se puede verificar que el perímetro de la curva *Copo de Nieve* es infinito, y que su área tiende a 8/5 del área del triángulo inicial.

3. *Triangulo de Sierpinski*

Este fractal fue concebido alrededor del año 1915 por el matemático polaco Waclaw Sierpinski (1882-1969).

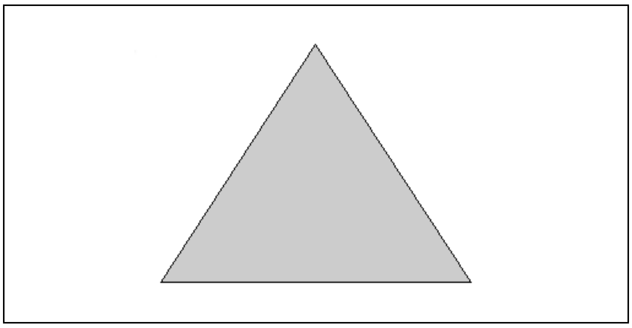
Se construye a partir de un triángulo cualquiera, luego se dibuja otro triángulo con vértices los puntos medios de los lados del primero, obteniendo cuatro triángulos semejantes al primero.

Waclaw Sierpinski

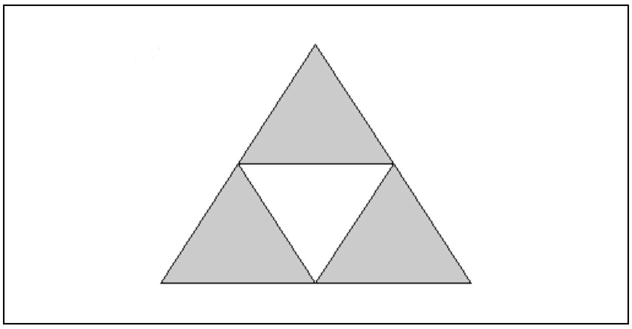
Luego se extrae el triángulo central y se repite el proceso con los otros tres triángulos, y así sucesivamente.

El más conocido es el generado a partir de un triángulo equilátero cuya construcción se muestra en la secuencia descrita a continuación.

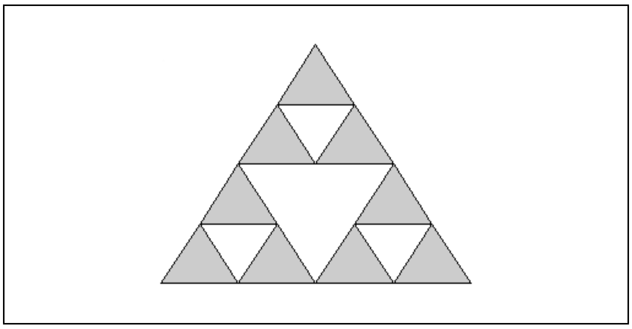
Etapa 0 (inicio)
Construir un triángulo equilátero.



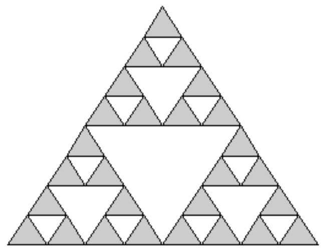
Etapa 1
Determinar los puntos medios de cada lado del triángulo, y construir el triángulo equilátero cuyos vértices son dichos puntos medios. Colorear en blanco el triángulo que queda en el centro (o quitar este triángulo).
.



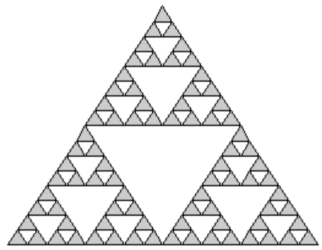
Etapa 2
Determinar los puntos medios de los lados de los tres triángulos construidos en el paso anterior, unir con un segmento los puntos medios de sus lados, y pintar en blanco el triángulo que queda en el centro
.



Etapa 3
Determinar los puntos medios de los lados de los nueve triángulos construidos en el paso anterior, unir con un segmento los puntos medios de sus lados, y en cada uno, pintar en blanco el triángulo que queda en el centro.



Etapa 4
Repetir el proceso indicado en las etapas anteriores.
.



Repitiendo la construcción sucesivamente se obtiene el *triángulo de Sierpinski*.

Observación. Respecto del *triángulo de Sierpinski* se puede verificar lo siguiente:

a) Considerando el triángulo equilátero inicial de lado 1, la suma de los perímetros los triángulos obtenidos en cada etapa es sucesivamente:

Etapa	N° 0	N°1	N°2	N°3	…	N° k	…
Suma de los perímetros	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{8}$	…	$3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k$	…

Luego, la suma de los perímetros del *triángulo de Sierpinski* (cuando k tiende a infinito) tiende a infinito.

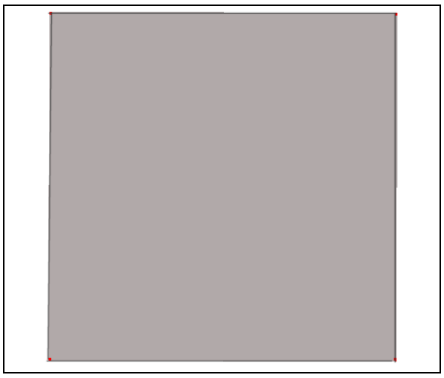
b) Considerando el triángulo equilátero inicial con área 1 (1 unidad de área), la suma de las áreas de los triángulos obtenidos en cada etapa es sucesivamente:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{3}{4}, \quad A_2 = \frac{9}{16}, \quad A_3 = \frac{27}{64}, \quad A_4 = \frac{81}{256}, \quad .. \quad , A_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k, \ldots$$

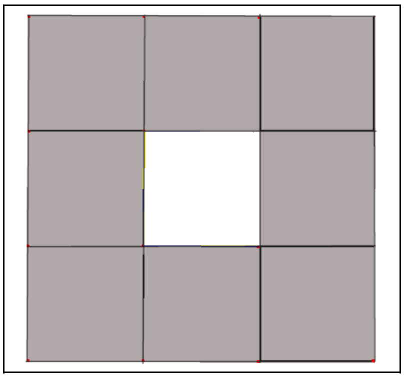
Luego, la suma de las áreas del *triángulo de Sierpinski* (cuando k tiende a infinito) tiende a cero.

4. *Alfombra de Sierpinski*

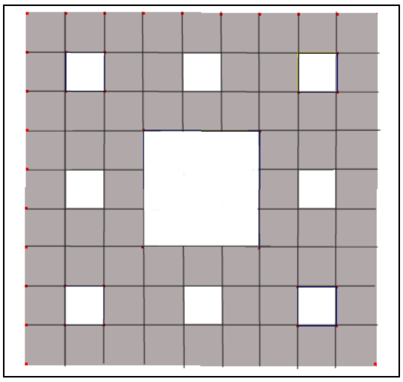
Etapa 0 (inicio)
Construir un cuadrado, y colorearlo en gris.



Etapa 1
Trisectar cada lado del cuadrado y construir nueve cuadrados congruentes. Colorear en blanco el cuadrado central.



Etapa 2
En cada uno de los ocho cuadrados grises de la etapa anterior trisectar cada lado y construir nueve cuadrados, y pintar en blanco el que queda en el centro



Repitiendo el mismo proceso sucesivamente, se obtiene la alfombra de *Sierpinski*.
Se deja como ejercicio determinar el área de la región gris en cada etapa, y conjeturar el área de la *alfombra de Sierpinski*.

Comentario final

Uno de los aportes más significativas de la *geometría fractal* es proporcionar recursos para modelar fenómenos naturales tales como las plantas, las nubes, las formaciones geológicas, la dinámica de crecimiento poblacional de colonias de bacterias, las fluctuaciones de precios en un mercado y los fenómenos atmosféricos. Esta geometría también ha contribuido a otros campos tan diversos como la lingüística, la psicología, las técnicas de compresión de imágenes digitales, la superconductividad y otras aplicaciones electrónicas. Las herramientas de la *geometría fractal* son, hoy día, elementos importantes en el trabajo de muchos físicos, químicos, biólogos, fisiólogos, economistas, etc., pues les han permitido reformular viejos problemas en términos novedosos, y tratar problemas complejos de forma muy simplificada.

El tema ofrece una interesante oportunidad para trabajar los conceptos básicos de geometría, figuras geométricas, cálculo de área y perímetro, construcciones con regla y compás y uso de algún software geométrico, permitiendo acercar la *geometría fractal* a la enseñanza media.

Las figuras presentadas en este trabajo fueron construidas con el software geométrico Cabri

Bibliografía

[1] Aguilera, N. (1995). *Un paseo por el jardín de los fractales* Buenos Aires: Red Olímpica.

[2] Miller, Ch. et all. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones.* Prentice Hall.

[3] Yamaguchi, M. (1997). *Mathematics of fractals*. Providencem, Rodhe Island: American Mathematical Society.

[4] *Descubriendo Fractales* Sitio web: http://www.oni.escuelas.edu.ar/olimpi99/fractales/principal.htm

[5] *Fractales clásicos*. Sitio web: http://www.campusred.net/straining/cursos/C2Dignacioargote/lecciones/clasicos.htm