Aproximándonos despacio al número π

Genaro Castillo G.[1]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Este artículo trata de determinar valores aproximados al número π, calculando los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en una circunferencia de radio R (se podría tomar, sin perder generalidad, R = 1).

El número π resulta del cuociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. La notación π, según la historia, fue usada por primera vez por el matemático galés William Jones en 1706 y popularizada por Leonhard Euler en su obra Introducción al Cálculo Infinitesimal. El matemático alemán de origen francés Johann Heinrich Lambert, alrededor de 1761, demostró que se trataba de un número irracional, es decir, no se puede expresar como el cuociente entre dos números enteros; en el Siglo XIX, otro matemático alemán, Ferdinard Lindermann probó que era trascendente, es decir, no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Estos hechos cerraron la posibilidad de obtener π como una cifra exacta y que la cuadratura del círculo no tiene solución. Es una de las constantes que más se repite en ecuaciones de la física, por eso despierta gran interés en los matemáticos y aficionados.

Recordemos que el perímetro de un polígono regular inscrito debe ser menor que el perímetro de la circunferencia respectiva, y que el perímetro de ésta última debe ser también menor que la de un polígono circunscrito. Esto lleva a las siguientes desigualdades:

$$p_k < 2\pi R < P_k, \quad k \geq 3 \qquad (1)$$

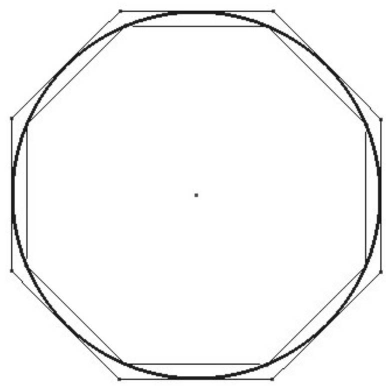

Figura 1

donde R es el radio de la circunferencia, p_k y P_k son los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito, respectivamente.

[1] Correo electrónico: gcastill@utalca.cl

Designaremos en lo que sigue por *AB* al segmento que une el punto *A* con *B*; $\overline{AB}$ denotará la longitud de dicho segmento. También, representaremos por l_m y L_m las longitudes de un lado de los polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia de radio *R*, respectivamente.

Ahora vamos a buscar relaciones entre todas estas magnitudes.

Supongamos que conocemos la longitud l_m, ¿cómo pasar a la longitud l_{2m}?

Observando la figura adjunta, si $\overline{AB} = l_m$ y *C* es la mitad del arco *AB*, entonces $\overline{AC} = l_{2m}$.

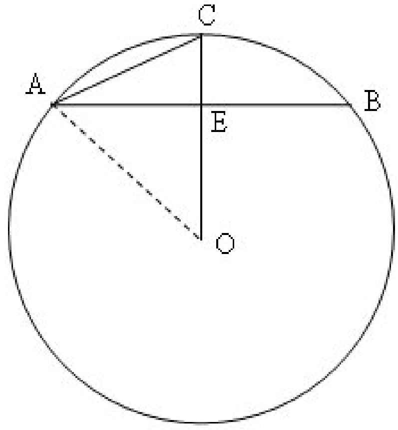

Figura 2

Por la relación pitagórica

$$\overline{OE} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l_m}{2}\right)^2}$$

y por lo tanto

$$\overline{AC}^2 = \left(\frac{l_m}{2}\right)^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{l_m}{2}\right)^2}\right)^2$$

De donde

$$l_{2m} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - l_m^2}\right)}, \quad m \geq 2 \qquad (2)$$

Si $m = 3$, se trata de un triángulo equilátero cuyo lado mide $l_3 = \sqrt{3}\,R$; si $m = 4$, es un cuadrado con lado $l_4 = \sqrt{2}\,R$; cuando $m = 5$, es un pentágono regular de lado $l_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\,R.$

Por ejemplo, al usar la fórmula (2) para *m = 5*, del pentágono regular obtenemos:

$$l_{5\cdot 2} = \sqrt{2 - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\,R$$

$$l_{5\cdot 2^2} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}}}\,R$$

$$l_{5\cdot 2^3} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}}\,R$$

y así sucesivamente.

Para todos los casos, notamos que en la raíz con signo menos aparece una sucesión recursiva del tipo

$$\begin{aligned} &a_1 = c,\ c \text{ una constante positiva} \\ &a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \end{aligned}$$

Sus cuatro primeros términos son:

$$a_1 = c, \quad a_2 = \sqrt{2+c}, \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+c}}, \quad a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+c}}}\,.$$

No es tan complicado comprobar que a medida que *n* crece y crece sin límite, entonces a_n se aproxima al 2, independiente del valor que le asignemos al primer término a_1= c > 0.

En particular, para el pentágono regular, con una calculadora de bolsillo se encuentra que:

$$\begin{aligned} c = a_1 &\approx 1.6180339887499 \\ a_2 &\approx 1.9021130325903 \\ a_3 &\approx 1.9753766811903 \\ a_4 &\approx 1.9938346674663 \\ a_5 &\approx 1.9984580724815 \\ a_6 &\approx 1.9996144809641 \\ a_7 &\approx 1.9999036179187 \\ a_8 &\approx 1.9999759043345 \end{aligned}$$

Siguiendo con el pentágono y esta sucesión $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$; podemos escribir:

$$\begin{aligned} l_{5\cdot 2} &= \sqrt{2-a_1} \\ l_{5\cdot 2^2} &= \sqrt{2-a_2} \\ l_{5\cdot 2^3} &= \sqrt{2-a_3} \\ l_{5\cdot 2^4} &= \sqrt{2-a_4} \\ &\vdots \\ l_{5\cdot 2^n} &= \sqrt{2-a_n} \end{aligned}$$

En general, para un polígono regular de *m* lados podemos definir

$$l_{m\cdot 2^n} = \sqrt{2-a_n}, \quad m \geq 3, \quad n \geq 1.$$

Donde $a_1 = \dfrac{\sqrt{4R^2 - l_m^2}}{R}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ para $n \geq 1$.

Para usar la fórmula primero debe decidir m, o sea, el número de lados del polígono regular inicial, segundo calcular a_1 correspondiente al lado l_m, por $a_1 = \dfrac{\sqrt{4R^2 - l_m^2}}{R}$.

Para obtener una cota superior de la longitud de una circunferencia, buscaremos una fórmula para determinar la longitud L_m de un polígono regular circunscrito.

En la Figura 3, supongamos que $\overline{AB} = l_m$ es la longitud del lado del polígono regular inscrito en la circunferencia de radio R y $\overline{CD} = L_m$ la del circunscrito respectivo.

De los triángulos semejantes OAE y OCF, se tiene

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}}$$

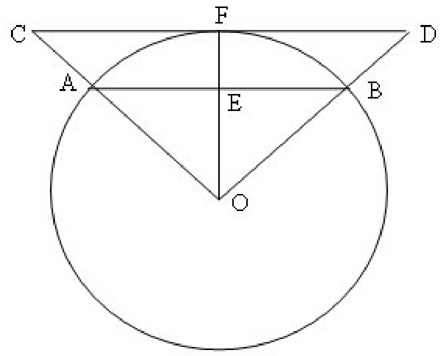

Figura 3

Donde

$$\overline{OE} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l_m}{2}\right)^2}, \qquad \overline{CF} = \frac{L_m}{2}, \qquad \overline{AE} = \frac{l_m}{2}, \qquad \overline{OF} = R\,.$$

Es decir,

$$\frac{L_m}{2R} = \frac{l_m}{2\sqrt{R^2 - \left(\frac{l_m}{2}\right)^2}}$$

despejando,

$$L_m = \frac{2 \cdot l_m \cdot R}{\sqrt{4R^2 - l_m^2}}, \quad m \geq 3.$$

Como dijo un maestro de la construcción vamos “concretando”... Si tenemos un polígono regular inscrito de $m \cdot 2^n$ lados, entonces los perímetros tanto del inscrito como el circunscrito, serán:

$$p_{m \cdot 2^n} = m \cdot 2^n l_{m \cdot 2^n} = m \cdot 2^n \sqrt{2 - a_n}\, R$$

$$P_{m \cdot 2^n} = m \cdot 2^n L_{m \cdot 2^n} = \frac{m \cdot 2^n \, 2 l_{m \cdot 2^n} R}{\sqrt{4R^2 - l_{m \cdot 2^n}^2}} = \frac{m \cdot 2^{n+1} \sqrt{2 - a_n}}{\sqrt{2 + a_n}} R$$

Por la desigualdad (1), que se encuentra al inicio de estas notas, se obtiene

$$m \cdot 2^n \sqrt{2 - a_n}\, R < 2\pi\, R < \frac{m \cdot 2^{n+1}\sqrt{2 - a_n}}{\sqrt{2 + a_n}}\, R$$

es decir, el número π “queda entrampado” como sigue

$$m \cdot 2^{n-1} \sqrt{2 - a_n} < \pi < \frac{m \cdot 2^n \sqrt{2 - a_n}}{\sqrt{2 + a_n}}, \qquad m \geq 3,\ n \geq 1.$$

Así como lo perfecto no es sinónimo de lo bueno, tampoco lo eficiente es sinónimo de lo hermoso.
A pesar de la ineficiencia, vamos a tomar $m = 5$ y $n = 7$, o sea, partimos con un pentágono de lado $l_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}R$, con $a_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ y el polígono regulares es de $6 \cdot 2^7$=640 lados, sólo para mostrar los valores entre los que se encuentra el número π, de acuerdo a la última desigualdad. Después de usar una calculadora jubilada y que ha sufrido varios tec-cerrados, se obtiene que

$$3{,}141611306 < \pi < 3{,}141620778$$

Otro ejemplo es el caso del hexágono, aquí m=6, l_m=R y $a_1 = \frac{\sqrt{4R^2 - R^2}}{R} = \sqrt{3}$ .Tomando n=8, se obtiene a_8= 1.999983267 y $p_{6 \cdot 2^8} = 3.141586586$ $P_{6 \cdot 2^8} = 3.141593157$

De todas maneras maravilla el cómo lo pudo hacer Arquímedes, cuando las calculadoras se llamaban ábacos. Debe ser difícil, por no decir imposible, dibujar un polígono de 1536 lados, número que en matemática es la nada misma.

Quien tenga una calculadora de mayor capacidad resolutiva o con la ayuda, por ejemplo, de Excel puede intentar con otros polígonos (m diferente) y n de mayor valor para obtener mejores aproximaciones de π.

Bibliografía

[1] *Cours de Géométrie, par une réunion de professeurs*, Ligel, París, 1958.