# Dificultades en la práctica de productos notables y factorización

**Teresita Méndez Olave**[1]

**Liceo Luis Cruz Martínez. Curicó.**

## Introducción

Uno de los conceptos que en el proceso de enseñanza-aprendizaje no llegan a dominar los alumnos, durante gran parte de la enseñanza media es el desarrollo de identidades notables y la factorización, muchos de ellos no tienen éxito al resolver ejercicios, ni ponen en obra los procedimientos correctos cuando se enfrentan a situaciones en los que este concepto es parte de la solución. El estudio de esta problemática evidencia un fenómeno didáctico complejo

Los alumnos tienen sus propias concepciones acerca de su funcionamiento y ponen en obra modelos de acción espontáneos y persistentes cuando resuelven estos ejercicios, como veremos.

La exposición que pretendo es un trabajo de tesis que desarrolle hace algunos años, la problemática que desarrollo la abordo desde un punto de vista matemático y cognitivo, basándome en el enfoque de la enseñanza de la matemática del Dr. Raymond Duval y sus contribuciones respecto de la aprehensión de un objeto de conocimiento vía cambios de registros, respetando ciertas reglas.

Algunos aportes de esta investigación son la elaboración de distintas categorías de la factorización e identidades notables, que retomo para efectuar diferentes análisis, a lo largo del trabajo, del objeto de estudio. Estas categorías organizan y dividen este conocimiento en forma gradual y por etapas, enfatizan las tareas matemáticas y cognitivas que debe enfrentar un alumno al desarrollar estos ejercicios. La elaboración de un cuestionario indagatorio cuya confección se apoya en las categorías identificadas, que son las que queremos que aparezcan o no en las producciones de los alumnos.

Pretendo en esta exposición presentar los resultados más importantes de esta investigación.

## Problemática Didáctica:

El tema de esta investigación focaliza el estudio de las clásicas identidades notables y la factorización de expresiones cuadráticas. Las dificultades que los alumnos presentan se aborda mediante un enfoque cualitativo, un estudio exploratorio que se apoya en el análisis de las producciones de los alumnos, y de las categorías que se desprenden del estudio del objeto matemático en cuestión.

**Por ejemplo:** Al factorizar $2x^2 - 2x - 12$**,** se pueden observar las siguientes respuestas:

[1] Correo electrónico: tetemenz@yahoo.es

R 1) $2x^2 - 2x - 12 = (2x - 4)(x + 3)$ R 2) $2x^2 - 2x - 12 = (2x - 3)(x + 4)$

R 3) $2x^2 - 2x - 12 = (2x + 6)(x - 2)$

Se constata que al no ser trinomio cuadrado perfecto el alumno se fija en los términos extremos $2x^2$ y 12, y los factoriza, buscando dos números que multiplicados den **12**, es decir retiene solo parte de la fórmula, el resto se olvida.

Ante la respuesta $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ cabe cuestionarse:

*El alumno, ¿distingue el cuadrado perfecto y lo factoriza, o el trabajo lo realiza sobre la base de los términos extremos?.*

Un análisis didáctico nos revela que estas dificultades se deben a:

1. La utilización de técnicas propias: Esto se debe a un fenómeno de pseudocomprensión de la regla a aplicar.

2. A pesar de que se les enseña la técnica para factorizar un trinomio del tipo $x^2 + bx + c$, que dice busque dos números que multiplicados den c y sumados den b, ellos no la toman en cuenta.

El estudio de producciones de alumnos nos muestra que hay dificultades anteriores no superadas.

El desarrollo del cuadrado del binomio también tiene sus dificultades, algunos alumnos los resuelven del modo siguiente:

$$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - 4^2 = 5x^2 - 16$$

Otras veces elevan al cuadrado sólo los números:

$$(5\mathrm{x} - 4)^2 = (5\mathrm{x})^2 - 4^2 = 25\mathrm{x} - 16$$

El modelo implícito corresponde a elevar cada término al cuadrado, posiblemente el alumno distribuya el exponente dos en cada término del binomio, es decir una extensión de la propiedad distributiva.

Una explicación de este fenómeno se relaciona con la lectura que el alumno efectúa en el registro algebraico de estos ejercicios; una lectura de izquierda a derecha, en una dimensión, que obstaculiza el modelo de acción pertinente que el alumno debe poner en juego. La lectura del mismo ejercicio en dos dimensiones, como tabla de doble entrada, lo favorece y se relaciona con el cambio de registro, del algebraico al figural.

Por ejemplo resolver $\mathbf{(2x - 7)^2}$ en dos dimensiones conduce al desarrollo:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 2x & - & 7 \\ \hline 2x & 4x^2 & - & 14x \\ - & & & \\ 7 & -14x & + & 49 \end{array} \quad = \; 4x^2 - 14x - 14x + 49 = \; 4x^2 - 28x + 49$$

*Modelo combinatorial, multiplicativo, de la propiedad distributiva*

Estas prácticas evidencian dificultades asociadas a:

$$\text{Dificultades} \begin{cases} \text{Técnica propia} \longrightarrow \text{elevar al cuadrado cada termino, otras} \\ \text{Extensión ámbito numérico complica la tarea} \\ \text{Complejidad en los términos del binomio} \end{cases}$$

Creo que se trata de un problema de naturaleza matemática y cognitiva pues el alumno, en el trabajo matemático, debe conocer la fórmula, y en la tarea cognitiva, identificar cada objeto particular de su ejercicio con los objetos generales de la fórmula a utilizar.

Hay muchas interrogantes que surgen al respecto, algunas de ellas son:

1. ¿Qué dificultades tienen los alumnos al desarrollar identidades notables y factorizar?
2. ¿Se pueden clasificar las dificultades?
3. ¿Estas son de naturaleza, matemática o cognitiva?
4. El privilegio del registro algebraico sobre los otros registros de expresión de la matemática, como el escrito, los esquemas y gráficos ¿tienen alguna influencia en estas dificultades?

**Marco teórico:**

La importancia de los diferentes registros de expresión de los conceptos matemáticos y su relación con la toma de conciencia del significado de un objeto de saber, Raymond Duval [4], y su puesta en funcionamiento.

De acuerdo al enfoque cognitivo de R. Duval el aprendizaje de conceptos matemáticos se ve impactado por la articulación de diferentes registros de expresión del objeto representado. En matemática hay diferentes formas de representación semiótica, cada una de ellas determina un sistema semiótico, ligado a signos y símbolos (en lenguaje verbal, algebraico, gráficos, otros), que Raymond Duval llama registro de expresión o de representación. Estos pueden ser convertidos en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pudiendo tomar significaciones diferentes para el sujeto que las utiliza.

Se distinguen tres actividades cognitivas ligadas a los registros de representación semiótica.

- Todo sistema semiótico esta ligado a diferentes registros de representación

- Transformar las representaciones usando reglas propias al sistema de manera de obtener otras representaciones que pueden constituir un aporte a la comprensión de la representación inicial
- Convertir las representaciones producidas en un sistema en representaciones en otro sistema, de tal manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones del objeto de estudio.

Estas actividades capacitan al individuo para dar significado al objeto de estudio y a establecer la distinción entre contenido y forma.

Por otra parte, el estudio de las nociones matemáticas en juego en la factorización y productos notables contribuye a identificar el campo de problemas en los que el concepto interviene, generando categorías para cada contenido que destacan tareas cognitivas y matemáticas a las que se deberían enfrentar los alumnos al desarrollar estos ejercicios. Estas categorías surgen del análisis de los ejercicios propuestos en textos escolares y de las propiedades del anillo de polinomio estudiado. Estas tipifican los ejercicios y los desglosan en tareas y subtareas evidenciando que las tareas matemáticas, para los alumnos, se dificultan por la tarea cognitiva implícita en su ejecución. Este estudio es uno de los aportes de esta tesis.

Las tareas son procedimientos que los alumnos ponen en juego al desarrollar estos ejercicios y una subtareas corresponde a un desglose más fino de la tarea propuesta por la complejidad del ejercicio.

En este estudio yo he encontrado categorías elementales y fundamentales, estas últimas requieren de elaboraciones mentales mas complejas, entran en juego abstracciones algebraicas.

La importancia de las categorías es que son un marco explicativo al que recurro durante el trabajo ya que a la luz de ellas se elabora y analiza previa y posteriormente el cuestionario indagatorio, los textos de estudio y el protocolo de producciones de los alumnos.

**Algunos ejemplos de categorías:** De las 6 categorías elaboradas en la factorización, para este trabajo, me referiré solo a la 3° y 4°, ellas aparecen según el orden dado en el trabajo original [9].

**I. En la factorización:**

**Categoría Nº 3**: Reconocer que un monomio es un producto de factores y utilizar la propiedad conmutativa de la multiplicación para reescribir el monomio.

Por ejemplo:

$$3ax^2y = \begin{cases} a3x^2y \\ y3ax^2 \\ x^2\,3ay \end{cases}$$

Esta es una categoría fundamental de la factorización ya que exige al alumno comprender que un monomio se puede descomponer en factores utilizando reglas matemáticas, la propiedad conmutativa en este caso. El alumno que no llega a esta abstracción le es difícil comprender que la expresión $x^2 + 4x + 4$ se descompone en factores de distinta naturaleza, eso si, que el del ejercicio del ejemplo anterior.

**Categoría N° 4: (Fundamental)** Factorizar un trinomio cuadrático ordenado. Aquí se distinguen dos tareas:

**4.1** Factorizar trinomio ordenado cuadrado perfecto de la forma $a^2x^2 + 2abx + b^2$. Aquí la tarea consiste en:

- Reconocer el desarrollo del cuadrado del binomio.
- Aplicar reglas de factorización.

Por ejemplo si se pide factorizar a) $x^2 + 4x + 4$ b) $4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$

El alumno tiene que reconocer (es una tarea cognitiva) en cada trinomio, el desarrollo de un cuadrado de binomio y factorizarlo, obviamente el segundo ejemplo tiene una mayor complejidad por el ámbito numérico en juego.

O bien, buscar dos números que multiplicados den como resultado $\frac{b^2}{a^2}$ y que sumados den $\frac{2ab}{a^2} = \frac{2b}{a}$ y sustituirlos en la fórmula $a^2(x + \frac{b}{a})(x + \frac{b}{a}) = (ax + b)^2$.

En el primer ejemplo $b^2 = 4$ y $a^2 = 1$ luego $\frac{b^2}{a^2} = 4$ y $\frac{2b}{a} = 4$, así los números son iguales a dos y su factorización es $(x + 2)^2$.

En el segundo ejemplo $b^2 = \frac{1}{4}$ y $a^2 = 4$ luego $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{16}$ y $\frac{2b}{a} = \frac{1}{2}$, así los números son iguales a $\frac{1}{4}$ y su factorización es $4(x + \frac{1}{4})^2 = (2x + \frac{1}{2})^2$.

O bien, resolver la ecuación de segundo grado asociada a este polinomio y factorizarlo con los opuestos de sus ceros, reales ó complejos.

**4.2.-** Factorizar trinomio cuadrático ordenado que no sea cuadrado perfecto.

Esta tarea se desglosa en dos subtareas dependiendo del trinomio dado, el que puede ser de la forma $\mathbf{x^2 + bx + c}$ ó $\mathbf{ax^2 + bx + c}$

La primera tarea, factorizar la expresión $\mathbf{x^2 + bx + c}$ algebraicamente corresponde a encontrar dos números que multiplicados den ***c*** y sumados den ***b.***

Por ejemplo los números que factorizan $\mathbf{x^2 + 5x + 6}$ son el dos y el tres

La segunda tarea, factorizar la expresión $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ algebraicamente corresponde a encontrar dos números que multiplicados den c/a y sumados den b/a**.**

Por ejemplo los números que factorizan $\mathbf{3x^2 + 10x + 6}$ **son** tales que su producto sea 6/3 y cuya suma sea 10/3. Esos números son los opuestos de los ceros del polinomio: $\frac{5-\sqrt{7}}{3}$ y $\frac{5+\sqrt{7}}{3}$.

**4.3**.- Como vemos, en el ejemplo anterior, se requiere de los ceros el polinomio para encontrar los números que lo factorizan. Ello implica una tarea adicional y de mayor exigencia, conocer la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas para encontrar los números que factorizan el polinomio.

Este análisis revela que la 4° categoría es más compleja y completa y requiere desglosarla en tareas más específicas, llamadas subtareas.

En cada categoría hay una tarea matemática a efectuar, factorizar, y una tarea cognitiva que tiene que ver con el procedimiento a utilizar en la factorización. ¿Recurrirá a la fórmula de factorización? ó reconocerá la suma por diferencia (cuadrado de binomio,…) e identificará (tarea cognitiva y matemática a la vez) los términos de su ejercicio con los del enunciado de la fórmula. Hay cambios de variables implícitos en estos procedimientos que dificultan las prácticas de los alumnos.

**II.** Categorías en los productos notables también hay 6 categorías, para esta exposición solo me referiré a 3 de ellas, las que aparecen según el orden dado en el trabajo original.

**<u>2 ª Categoría</u>:** Calcular el cuadrado cuando el binomio es de la forma **(x + n)** siendo **<u>n</u>** es un número real dado

Por ejemplo $\mathbf{(x + 4)^2}$ exige al alumno dos tareas que son a la vez matemáticas y cognitivas:

- Identificar los términos de su binomio con los $a$ y $b$ de la fórmula general $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y aplicarla

Hay en esta tarea un cambio de variable implícito.

- Aplicar el concepto de potencia y la propiedad distributiva.

Vemos que la tarea es más compleja si se pide el desarrollo de $\left(3x - \frac{3}{2}\right)^2$, ya que los alumnos tienen dificultades en el dominio de las operaciones que ello implica

**<u>3ª Categoria</u>:** Calcular el cuadrado cuando el binomio es de la forma $(\alpha x + \beta)$, en que $\alpha$ y $\beta$ son números reales dados.

En esta categoría el alumno debe poner en juego las siguientes tareas:

**3.1** Identificar los términos de su binomio con los a y b de la fórmula, para luego aplicarla.

En este caso a = α $x$ , lo que determina una tarea más compleja para el alumno pues el percibe en la fórmula elevar solo un término al cuadrado y no dos como en este caso. Otra dificultad es el doble producto del primer término por el segundo.

**3.2** Determinar el desarrollar utilizando el concepto de potencia y la propiedad distributiva

Por ejemplo de acuerdo a la tarea 3.1 al desarrollar $(5x-4)^2$ se ponen en juego los siguientes procedimientos:

a = 5 $x$ b = -4 cambio de variable implícito

$a^2 = 25x^2$ $b^2 = 16$ 2ab = - 40$x$, así el desarrollo es:

$(5x-4)^2 = 25x^2 - 40x + 16$

**5ª Categoría**: Calcular el cuadrado cuando el binomio es de la forma $(\alpha x + \beta y + \varphi z)$, en que $\alpha$ , $\beta$ y $\varphi$ son números reales dados.

Esta categoría exige a los alumnos.

**5.1** Convertir el trinomio en binomio, asociando dos de sus términos.

**5.2** Identificar el binomio $(\alpha x + \beta y)$ con el término a de la fórmula y $\varphi z$ con b y luego aplicarla. Esta tarea supone el dominio de las categorías anteriores.

**5.3** Determinar el desarrollo a través del concepto de potencia y la propiedad distributiva.

**Metodología:**

La metodología de investigación es cualitativa según el modelo análisis a priori – experiencia - análisis a posteriori. La experiencia consistió en elaborar un cuestionario indagatorio que aplicado a alumnos de 2º a 4º medio del Liceo Luís Cruz Martínez de Curicó permitiera clasificar la información llegando a seleccionar 12 alumnos representativos del total de la muestra. Junto con la información del cuestionario, a estos 12 alumnos, se les sometió a una entrevista grabada, la que permitió precisar aún más las decisiones y selecciones de ellos frente a las situaciones a las que se enfrentaron, y tener un conocimiento más acabado de sus procedimientos y modelos de acción espontáneos para contrastar con el análisis previo. Lo que en la tesis corresponde al Protocolo: Análisis de las producciones de los alumnos.

**Algunos Resultados**

Algunos resultados que se desprenden de los distintos análisis realizados son los siguientes:

- En el análisis de textos de estudio, realizado a la luz de las categorías de factorización y productos notables creadas, deja en evidencia que los textos estudiados no desarrollan un campo completo de ejercicios asociados a las categorías propuestas sino que estas se reducen a las que se considera las de mayor dificultad. Además el enfoque de estos textos, el algebraico, esta centrado en todos ellos en la memorización de una fórmula la que carece de una interpretación concreta, además de carecer de un sustento matemático, las propiedades del anillo de polinomios.

- La enseñanza y los textos de estudio favorecen el registro algebraico de las nociones estudiadas entregando reglas de factorizar y para desarrollar productos notables, y sus aplicaciones directas. Se percibe entonces que la tarea matemática no es difícil pues se trata de aplicar correctamente las reglas. Desde la didáctica de la matemática nos damos cuenta que el alumno debe reconocer en las reglas sus elementos y sustituirlos por los del ejercicio que esta desarrollando, hay un cambio de variable implícito que dificulta la tarea que es de naturaleza cognitiva.

- Algunos resultados importantes que surgen del protocolo de producciones de los alumnos son las siguientes:
  - El alumno modifica sus modelos de acción, en vista de lo que percibe como resultado correcto y no de acuerdo a las propiedades del concepto matemático, cuando el ejercicio no se presenta en la forma tradicional. Esto es particularmente visible en preguntas de desarrollo y en preguntas cerradas en las que el alumno debe decidir el desarrollo que corresponde al ejercicio. Por ejemplo en el siguiente ítem del cuestionario indagatorio.

    Marca la alternativa que muestra los pasos correctos del desarrollo $\left[9-\left(2x^2+4x\right)\right]^2$

    a) $9^2-\left(2x^2+4x\right)^2=9^2-(2x^2)^2-(4x)^2=81-4x^4-16x^2$

    b) $9^2-18\left(2x^2+4x\right)+(2x^2+4x)^2=81-36x^2-72+4x^2+16x^2+16=25-16x^2$

    c) $9^2-18\left(2x^2+4x\right)+(2x^2+4x)^2=81-36x^2-72x+4x^4+16x^3+16x^2=$
    $4x^4+16x^3-20x^2-72x+81$

    d) $9^2-(2x^2+4x)^2=81-4x^4-16x^2-16=65-16x^2-4x^4$

    Los alumnos que dominaban la formula tradicional cambiaron su modelos de acción por el de la alternativa **a)** y/o **d).**

  - Los alumnos, sin tener práctica en este tipo de situaciones, muestran más facilidad en articular registros figúrales y algebraicas en expresiones factorizadas, que en transformar un trinomio cuadrático en producto de binomios, del lenguaje algebraico al figural. Pienso que la dificultad se presenta en que el término lineal del trinomio lo asocian a un segmento y no un rectángulo en el registro figural.

**Conclusiones:**

El análisis de producciones de los alumnos deja ver que los modelos de acción espontáneos y persistentes de algunos alumnos tienen relación, en el caso del cuadrado de binomio, con el doble producto del primero por el segundo; ellos no pueden establecer el cambio de registro pertinente, de lo verbal a lo algebraico, por ello es que lo escriben y lo dicen de formas variadas, o simplemente lo omiten en sus desarrollos. Así, los modelos de acción espontáneo puesto en obra son: “el primer término al cuadrado más el segundo término al cuadrado”, “reducir términos después de elevar el primero al cuadrado más el segundo al cuadrado,” “el coeficiente del primer término al cuadrado más el coeficiente del segundo término al cuadrado”, “el doble producto del primero por el segundo término se expresa como el doble producto de la suma del primer y segundo término”. Estas dificultades se agudizan aún más cuando los coeficientes de los términos del binomio son raíces, decimales o fracciones, ya que la operatoria en estos sistemas numéricos no es completamente dominada por los alumnos. De esta manera ellos recurren a modelos propios de acción, y operan, con estos números, como creen y pueden. Esto se comprueba en las respuestas del cuestionario En particular, en el cuadrado de binomio $\left(\sqrt{3}-x\right)^2$, al ejecutar la fórmula algunos alumnos, no toman en cuenta el signo radical, ya que no tiene un significado matemático para ellos, entre 3 y $\sqrt{3}$**,** ellos ven sólo el 3.

Ninguno de los alumnos reconoció el cuadrado de binomio, ni la suma por diferencia, cuando sus términos son expresiones algebraicas más complejas, como en las categorías en que los términos del binomio son además binomios. Por ejemplo: $[3+(5x^2-9x)]\cdot[3-(5x^2-9x)]$.

Esto lleva a los alumnos que sí lo reconocen en condición estándar, y ejecutan la fórmula, a cambiar su modelo de acción por la de aquellos alumnos que tiene dificultades en el modelo estándar. Así vemos que en el desarrollo de preguntas del cuestionario, el modelo de acción puesto en obra es: “cada término de la expresión al cuadrado”, “el cuadrado del binomio (primer término de la expresión) más el cuadrado del segundo término”, ó “reducir la expresión a dos términos y aplicar la fórmula cuadrado de binomio”.

Uno de los factores que influye en este fenómeno es que la enseñanza hace poco énfasis en reconocer los términos del modelo general, y además este modelo no se extiende a aquel en que los términos del binomio son expresiones algebraicas binomiales, estudiadas en las categorías.

Ninguno de los alumnos entrevistados puso en obra algún modelo de factorización de trinomios cuadráticos. El significado que los alumnos tienen de la factorización es el de buscar factor común en todos los términos del polinomio, y por lo tanto lo asocian a un monomio. De manera que factorizan trinomios cuadráticos parcialmente, según las categorías que se refieren a la factorización de una expresión en monomio por polinomio, en general. Otros modelos de acción evidenciados en las diferencias de cuadrado es factorizar la indeterminada y el número por separado y factorizar dividiendo cada término de la expresión por dos.

Además, el análisis de producciones deja ver que el alumno modifica sus modelos de acción en vista de lo que percibe como resultado correcto y no en vista de propiedades del concepto matemático. Esto es particularmente visible en las respuestas que los alumnos dan a preguntas del cuestionario, en las el alumno debe decidir cual de los desarrollos mostrados en las diferentes alternativas corresponde al ejercicio presentado.

Otra de las ideas desarrolladas es la que da cuenta de la adquisición del conocimiento matemático a través de la articulación de distintos registros de expresión. En esta investigación se articulan el registro verbal, el algebraico y el figural, considerado en el cuestionario indagatorio.

Las producciones de los alumnos evidencian que es pertinente:

- Articular los registros algebraicos y figural (incluso el de la lengua materna). El trabajo de convertir objetos algebraicos y numéricos en objetos geométricos permite al alumno razonar, inferir y deducir resultados.
- Incorporar en la enseñanza el desarrollo de las categorías junto con situaciones de movilización de registros semióticos sería un requisito mínimo para la comprensión de estas técnicas.
- Las fórmulas de factorización e identidades notables se favorecen seleccionando los ejercicios por categorías, las señaladas, ya que éstas dejan ver la dificultad matemática y la cognitiva, que los profesores deben conocer y tomar en cuenta para la enseñanza.

Este es un primer estudio acerca de este concepto, quedan algunas interrogantes abiertas que se desprenden de esta investigación, por ejemplo:

- La elaboración de la enseñanza considerando las categorías encontradas y los cambios de registro.

**Bibliografía:**

[1] Boyer C. (1992). *Historia de la matemática*. Alianza Universitaria.
[2] Decreto 2020 (1998). *Objetivos Fundamentales y Contenidos mínimos obligatorios de la educación Media*.
[3] Duval R. (1996). ¿*Quel cognitive retenir en didactiques des mathematiques*? Recherches en didactiques des mathematiques, Vol 16 nº 3.
[4] Duval R. *Semiosis y pensamiento humano*.
[5] Gallardo – Rojano (1988). *Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético – álgebraico*. Recherches en didactiques des mathematiques, Vol 9 nº 2.
[6] Gélis J. (1993). *Élements d'une thèorie en Algebre. Application au cas de la Factorization d'en expresions polynomiales*, Les debats des Didactique des mathematiques, Actes du seminaire nacional, 1993 – 1994.
[7] Godement R. (1978). *Álgebra. Editorial* Tecnos.
[8] Jarufe T, Blanco S. (1990). *Matemática I educación Media.* Editorial Santillana.
[9] Méndez, O. Teresita. *Dificultades en la práctica de la factorización y productos notables*. Tesis de grado. UCV.
[10] Merklen H. (1972). *Introducción a la teoría de Números Reales y Naturales*. Ediciones Universitarias. Valparaíso.
[11] Merklen H. (1973). *Introducción a la teoría de Números Enteros*. Ediciones Universitarias. Valparaíso.

[12] Pröschle F. (1956). *Álgebra Elemental*. Editorial Ceres.
[13] Riera G (1999). *Matemática 1º Medio*. Editorial Zig – Zag
[14] Tonnelle J. DEA. *Le Monde Clois de la factorización au premier cycle*. IREM de Bordeaux. Et Aix - Marseille