Propuestas para la investigación que emergen del estudio de una generalización matemática[1]

Hernán E. González Guajardo[2]

Universidad de Santiago de Chile

En realidad, cualquier tipo de actividad de estudio de la matemática resulta terreno fértil para generar preguntas que promuevan la investigación en educación matemática. Desde el especialista que, a partir de una situación teórica que le lleva a centrar su atención en un determinado fenómeno o preguntas que le resultan particularmente motivantes, desencadenando un proceso permanente de búsqueda de respuestas para conocer mejor la situación o fenómeno, explicarla y predecirla, hasta el profesor de aula que desea poner a prueba con sus alumnos una determinada estrategia didáctica o medio instruccional o aquel estudiante de pedagogía que, como parte de su formación profesional debe realizar un proceso de observación del futuro campo profesional, todos ellos se ven involucrados en diversos procesos de investigación en educación matemática que, si bien difieren en varios aspectos, coinciden en que todos ellos buscan encontrar respuestas que les permitan aclarar determinadas situaciones o verificar ciertas hipótesis generadas en el área de estudio conocida como educación matemática.

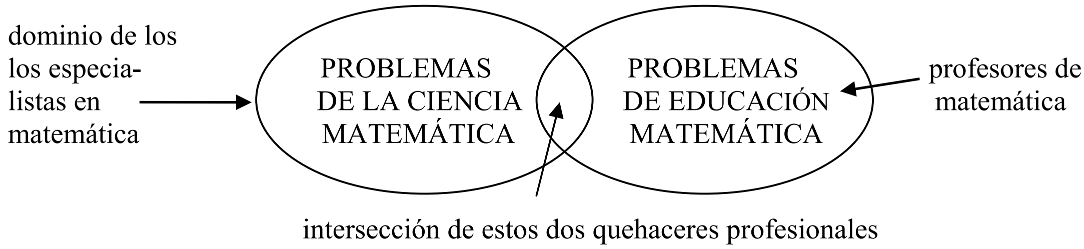
A continuación se presenta un diseño de actividades para el estudio de un importante teorema algebraico que generalmente está considerado en el currículo matemático de la enseñanza media[3]. A medida que se exhiban sus partes, se indicarán las preguntas que emergen de ellas.

EL CONSTRUCTO TEÓRICO.

El ámbito del quehacer del profesor de matemática muestra una intersección no vacía con otros ámbitos, como por ejemplo, el de los investigadores matemáticos o especialistas matemáticos cuyo principal quehacer profesional consiste en un afán permanente por ampliar las fronteras de esta ciencia. También los ingenieros matemáticos y varios otros científicos cuya preocupación prioritaria la constituye la matemática, poseen ámbitos asociados a sus respectivos quehaceres profesionales que se intersectan en forma no vacía con el ámbito del profesor de matemática.

Esta situación puede interpretarse a través del siguiente gráfico:

[1] Trabajo elaborado con el apoyo del Proyecto de Investigación DICYT 039733GG.
[2] Casilla 33081, Correo 33, Santiago de Chile. E-mail: hernan.gonzale@usach.cl
[3] En CHILE la Enseñanza Media es el ciclo anterior a la enseñanza superior o universitaria. Normalmente participan de él adolescentes entre 12 y 15 años.



Pero, si bien es cierto que existe esta intersección -y es bueno que así sea- también deben quedar establecidas las diferencias que permiten caracterizar estos dos dominios del hacer profesional. La parte principal del dominio del hacer del profesor de matemática debe considerar las diversas preocupaciones relacionadas con los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática y que emergen estrechamente inter-relacionados con múltiples fenómenos psicológicos y sociales. Es el conocimiento matemático contextualizado y seleccionado por el educador matemático y valorizado por el estudiante a través de sus aportes y aplicaciones concretas.

Sin embargo, y aquí aparece lo paradojal de la realidad observada al menos en Chile, las interacciones verbales de los que aprenden y de los que enseñan, muestran claras evidencias de un sobre-énfasis en los contenidos en desmedro de aquellas preocupaciones que presumiblemente deberían constituir el centro del quehacer profesional de los profesores: los problemas del estudio de la matemática y de la evaluación de las competencias esperadas.

En la búsqueda de este sistema inter-relacionado del hacer matemático, se pueden observar otros haceres elementales o cotidianos que pueden sugerir una pista. En efecto, cuando nos enfrentamos a un objeto nuevo, desconocido, una caja con instrumentos o juegos, nuestra primera acción o hacer instintivo consiste en abrir la caja y observar su contenido, las piezas o partes que lo componen **(**PRIMERA ETAPA**)**. Generalmente se trata de un hacer fuertemente manipulativo que canaliza el "aprendizaje" a través de nuestros órganos sensoriales: vista y oído frecuentemente (asociados a la trilogía expositiva[4]: "tiza, pizarrón y saliva"). Tomamos los objetos, piezas o instrumentos, los observamos atentamente, los palpamos, miramos su forma, color y apariencia, elaboramos algunas hipótesis acerca de la materia con que están construidos y del posible uso que podemos hacer de ellos, planificamos algunas experiencias sensoriales básicas como por ejemplo, ponerlos en fila, ordenarlos por altura, golpearlos entre sí para oir su sonido, agitarlos para notar si en su interior existen partes movibles, dejarlos caer al suelo, etc. Es, claramente, una etapa de descubrimiento no guiado que dependerá de la naturaleza de los objetos, de la información previa que podamos tener sobre ellos y de la experiencia que hayamos acumulado en acciones o haceres semejantes.

Cuando se estima que este hacer ya no puede entregar mayor información o conocimiento sobre los objetos en sí, nuestra naturaleza inquisitiva o drive cognitivo (Ausubel[5], 1969) nos impulsa a continuar la cadena de acciones, pero ahora este hacer adquiere una nueva característica que permite distinguir en él a una SEGUNDA ETAPA**.**

[4] Expresión de lenguaje popular muy conocida en Chile.
[5] TOWARSD A THEORY OF INSTRUCTION, Jerome Bruner, Harvard Press, 1966

En efecto, habiendo logrado una satisfactoria aproximación a la naturaleza física de los componentes u objetos del conjunto que estábamos examinando, la secuencia del hacer continua en forma natural buscando relaciones entre los objetos, leyes que los manejen o que permitan hacer algo con ellos, propiedades que se cumplan en estos objetos, reglas estructuradas o semi estructuradas que amplíen el anterior campo del hacer (conocer los nuevos entes) y lo transformen en uno más amplio con perspectivas de acciones más complejas y con un sentido propio, que puede ser de carácter utilitario (¿para qué pueden servir estas piezas?). Es la etapa de la búsqueda y del conocimiento de las instrucciones o reglas que permitan usar las piezas recientemente conocidas con un propósito y sentido práctico amplio. En el caso de los instrumentos, juegos, máquinas y equipos, los fabricantes se preocupan de adjuntar por escrito estas instrucciones y reglas.

Una vez conocidas y practicadas estas reglas o conjuntos de inter relaciones definidas para estos objetos o entes, el hacer comienza a tomar una connotación nueva que permite asegurar que estamos comenzando una TERCERA ETAPA.

En esta tercera y última etapa de esta importante secuencia del aprendizaje, se desemboca en la utilización de los conocimientos adquiridos en las dos etapas anteriores. Lo aprendido sobre las piezas y sus reglas o propiedades nos permiten emplearlas, de manera pertinente, tras los fines propios para los cuales fueron diseñadas. Esta tercera etapa involucra la utilización práctica, de carácter terminal, que con frecuencia reconocemos como "la aplicación" o "uso práctico" del conjunto de piezas.

La Segunda Etapa del constructo explicativo del estudio de la matemática que nos interesa ahora se refiere al estudio de las GENERALIZACIONES MATEMÁTICAS, que corresponden a aquellas estructuras o armados lógico-matemáticos, construidos con conceptos y susceptibles de ser aplicados a situaciones concretas. Tal como en la etapa de los conceptos, aquí también existe una concepción bidimensional de las generalizaciones. Por una parte su concepción clásica de constituir una herramienta para realizar trabajos matemáticos y por otra parte su interpretación como modelo o "plantilla" que permite verificar hipótesis según los calces producidos en situaciones concretas. En efecto, cuando alguien verifica el calce de un determinado teorema o generalización sobre un conjunto de datos o situaciones algebraicas o geométricas determinadas, puede inferir con seguridad la ocurrencia (o no) de otra u otras situaciones no conocidas. Por ejemplo, usando el teorema de Euclides de la Altura como plantilla, es posible deducir si un determinado triángulo del plano, del cual se conoce la longitud de una de sus alturas y las medidas de las proyecciones de dos lados sobre el tercero que contiene al pié de la hipotenusa, es o no un triángulo rectángulo (conocimiento nuevo inferido).

Pregunta 1: ¿Cuál de las dos dimensiones es más frecuentemente usada por profesores de aula, cómo la usan y porqué la usan?

Pregunta 2: ¿Cuál de ambas dimensiones produce efectos didácticos más relevantes o conduce a un trabajo de estudio de la matemática más significativo?

Algunas características que distinguen a las generalizaciones son:

a) Todas incluyen, en forma explícita o implícita, el cuantificador universal.

b) Poseen variables que están definidas sobre dominios determinados. Estos dominios condicionan el valor de verdad de la generalización.
c) Son susceptibles de asociarles un determinado valor de verdad. Establecer y reconocer una justificación este valor de verdad se llama: "demostrar la generalización".
d) Existen diversas formas y grados para establecer el valor de verdad.
e) Son susceptibles de ser instanciadas escogiendo valores específicos desde los dominios de las variables.
f) Están construidas usando los conceptos como elementos básicos.
g) Existen dos categorías de competencias asociadas a cada generalización. De Tipo I que corresponden a aquellas necesarias o requeridas para poder instanciar adecuadamente la generalización y las de Tipo II que corresponden a las nuevas competencias provenientes de la capacidad de usarla pertinente y exitosamente.

Pregunta 3: ¿Qué consideraciones didácticas pueden desprenderse de esta caracterización?

Pregunta 4: ¿Qué tipo de materiales pueden diseñarse para apoyara las estrategias deductivas de los estudiantes y cuán efectivos pueden llegar a ser?

Finalmente, la tercera etapa propuesta en el constructo comprende la utilización de las generalizaciones en situaciones concretas y específicas de modelización. Es la etapa donde se estudia y practica el desarrollo de técnicas y que aparece notablemente considerada en pruebas nacionales como SIMCE[6] y también en las que diariamente diseñamos los profesores.

Pregunta Nº 5: ¿Existe realmente un sobre énfasis del estudio de técnicas en desmedro de lo conceptual en las aulas de la enseñanza media?

Pregunta Nº 6: ¿Cuál es el riesgo involucrado en la aceptación del principio: "realización de tareas matemáticas terminales son suficientes para inferir aprendizajes matemáticos significativos"?

LAS CATEGORÍAS DE INSTANTES DE ESTUDIO DE GENERALIZACIONES.

También aquí es posible considerar dos categorías principales de instantes de estudio para las generalizaciones matemáticas: las llamadas EXPOSITIVAS que se caracterizan porque la institucionalización es temprana y el nivel de desarrollo del conocimiento que se estudia es alto, y las POR DESCUBRIMIENTO GUIADO (tanto inductivo como deductivo) que se caracterizan por los valores opuestos a los recién señalados para las expositivas.

Algunos instantes de estudio que emergen de ambas categorías son:

- Manipulando instancias de la generalización.
- Aseverando generalizaciones.

[6] Sistema de Medición de la Calidad de la Educación. Lo lleva a cabo en Chile el Ministerio de Educación y consiste en Pruebas de matemática y de lenguaje que se aplican masivamente en 4º Básico, en 8º Básico y en 2º Medio. Buscan recoger información para las instituciones escolares y los padres y apoderados.

- Realizando aplicaciones de generalizaciones. Esta forma implica: una situación que requiere reconocer cuál de las generalizaciones estudiadas es la pertinente, una vez determinada instanciarla adecuadamente y finalmente validar los resultados obtenidos.
- Buscando contra instancias de una generalización.
- Reconociendo dominios y variables de una generalización.
- Desarrollando descubrimiento guiado inductivo o deductivo
- Reconociendo y recordando elementos de entrada ya estudiados: generalizaciones, conceptos y técnicas anteriormente estudiadas y pertinentes a la generalización actualmente en estudio.

Pregunta Nº 7: ¿Qué otros instantes de estudio de una generalización pueden formularse?

ALGUNAS COMPETENCIAS MATEMÁTICAS ASOCIADAS AL ESTUDIO DE LAS GENERALIZACIONES MATEMÁTICAS:

- Distinguir los conceptos involucrados en una generalización.
- Reconocer las variables y sus correspondientes dominios en una determinada generalización.
- Expresar una generalización en la forma: $p \rightarrow q$.
- Utilizar argumentos deductivos válidos para probar el valor de verdad de una generalización.
- "Reparar" un proceso deductivo erróneo utilizado para probar una determinada generalización.
- Reconocer en qué puntos exacto se ha cometido un error en un proceso de demostración deductiva.
- Distinguir las conductas de Tipo I y de Tipo II asociadas a una determinada generalización.
- Descubrir inductivamente una determinada generalización.
- Descubrir el o los errores cometidos en la demostración aparente de una contradicción matemática.
- Alterar el valor de verdad de una determinada generalización, mediante la redefinición de los dominios de sus variables.
- Construir el mapa deductivo de una generalización determinada.
- Dado un mapa deductivo de una determinada generalización, clasificar las implicaciones utilizadas en: provenientes de teoremas anteriores y provenientes de definiciones conceptuales.
- Instanciar una generalización escogiendo libremente elementos de los dominios de las variables.
- Evaluar dos mapas deductivos distintos para una misma generalización a partir de criterios determinados.
- Distinguir el o los criterios empleados en la evaluación de un determinado mapa deductivo de una generalización.

A continuación se ejemplifican algunas de estos instantes de estudio en el diseño de planificación de clases para un determinado teorema algebraico que a veces el currículo matemático de la Enseñanza Superior lo ubica al inicio del estudio del álgebra, pero que sin embargo es susceptible de ser considerado también en la Enseñanza Media.

INSTANTE 1: MOTIVACIÓN MEDIANTE PROBLEMA INICIAL.

A pesar que la generalización plantea una precisa relación de carácter algebraico, sin embargo es posible encontrar para este caso una situación que resulta modelable por ella: *¿Cuántos cuadrados de longitud, 1, de longitud 2, ... , de longitud 8 podemos determinar en un tablero de ajedrez?*

En este instante muchos de los estudiantes que estudian por primera vez el teorema pueden sentirse confundidos y no lograr iniciar una estrategia de solución. Más aún si el enunciado se cambia por otro donde la necesidad de considerar cuadrados de diversas longitudes queda sub entendida, como por ejemplo: *¿Cuántos cuadrados se pueden considerar en un tablero de ajedrez?*

Después de unos minutos que dejan en evidencia una incapacidad generalizada para enfrentar el problema, la(el) profesora(or) puede sugerir algunas acciones que permitan iniciar el proceso de solución.

Pregunta Nº 8: ¿Qué estrategias de motivación parecen ser más exitosas para el estudio de la matemática que realizan adolescentes?

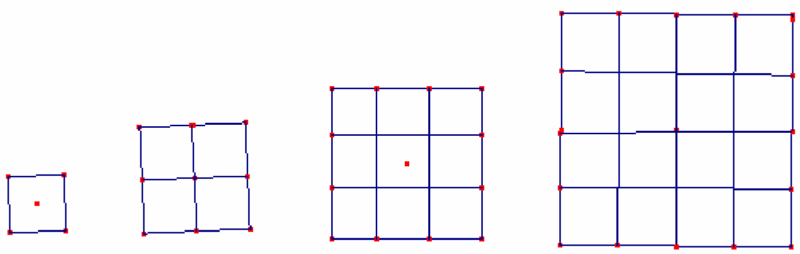
Pregunta Nº 9: ¿Cuán influyente es la cultura escolar de la institución y su proyecto educativo en la motivación para estudiar matemática de los adolescentes?

INSTANTE 2: EL ANÁLISIS DE LAS INSTANCIAS.

Después de aclarar las siguientes dos situaciones fundamentales:

a) El tablero de ajedrez es un cuadrado de 8 x 8 cuadrados unitarios.
b) Se pregunta por todos los posibles cuadrados de longitudes 1, 2, 3, ...8 que pueden considerarse en el tablero.

Se sugiere a los estudiantes que construyan y analicen ordenadamente las instancias generadas en la situación. En este instante se inicia un proceso empírico de descubrimiento guiado inductivo muy importante que sustentará las primeras hipótesis de los alumnos.
Se buscará que ellos construyan y cuantifiquen las instancias:



Si n = 1 entonces hay 1 cuadrado de longitud 1. Total: 1 cuadrado.

Si n = 2 entonces hay 1 cuadrado de longitud 2 y 4 de longitud 1. Total: 5 cuadrados

Si n = 3 entonces hay 1 de longitud 3, 4 de longitud 2 y 9 de longitud 1 Total: 14 cuadrados

Si n = 4 entonces hay 1 de longitud 4, 4 de longitud 3, 9 de longitud 2 y 16 de longitud 1 Total: 30 cuadrados

Se observa que en este instante la dificultad técnica que aparece se refiere al conteo de los cuadrados con longitudes intermedias, ya que las longitudes n y 1 son inmediatas. Se puede insinuar el uso de figuras de tamaño grande y de lápices de colores.
Determinar el conteo para n = 5 es un desafío técnico.

INSTANTE 3: DESCUBRIMIENTO GUIADO INDUCTIVO.

Las instancias construidas:

Si n = 1 el total es 1 = 1
Si n = 2 el total es 1 + 4 = 5
Si n = 3 el total es 1 + 4 + 9 = 14
Si n = 4 el total es 1 + 4 + 9 + 16 = 30

deberían hacer emerger en los estudiantes las primeras hipótesis al notar que ellas dejan de manifiesto un patrón de comportamiento*: la cantidad total de cuadrados a considerar corresponde a la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales donde n es la longitud del cuadrado mayor*.

De esta manera se podría aventurar que:

Si el tablero fuera de longitud cinco (con 25 cuadrados unitarios) entonces el resultado correspondiente al total de cuadrados de longitud 1, 2, 3, 4 y 5 podría ser: 1 + 4 + 9+ 16 + 25 = 55.

Si esta hipótesis fuera correcta, ya se estaría en condiciones para resolver el problema inicial.

Pregunta Nº 10: ¿En qué grado o medida los adolescentes de la enseñanza media han desarrollado estrategias de pensamiento inductivo?[7]

INSTANTE 4: LA BÚSQUEDA DE UNA EXPLICACIÓN TECNOLÓGICA.

En este instante la(el) profesora(or) comenta con los estudiantes la tecnología de las diferencias finitas que permite encontrar el polinomio que liga a dos variables, una dependiente y

[7] Esta pregunta la he utilizado como centro de una investigación que llevo a cabo en la actualidad.

otra independiente, cuando se conoce un conjunto de instancias de dicho polinomio y = P(x) o generalización matemática.

Para ello les invita a completar la siguiente tabla:

Longitud del tablero original (Variable independiente x)	**Cantidad máxima de cuadrados a considerar (Variable dependiente y)**	**PRIMERA DIFERENCIA**	**SEGUNDA DIFERENCIA**	**TERCERA DIFERENCIA**
1	1			
2	5	**4** (5 – 1)		
3	14	**9** (14 – 5)	**5** (9 – 4)	
4	30	**16 (**30 – 14)	**7** (16 – 9)	**2** (7 – 5)

Y les propone determinar en qué lugar se produce la primera diferencia constante. Como claramente el conjunto de cuatro instancias construidas resulta insuficiente para determinar cuál diferencia es la que resulta constante, les propone ampliar el número de instancias, lo que puede hacerse a través de la hipótesis descubierta y refrendada con manipulaciones empíricas. Así la tabla final queda de la siguiente forma:

Longitud del tablero original (Variable Independiente x)	**Cantidad máxima de cuadrados a considerar (Variable dependiente y)**	**PRIMERA DIFERENCIA**	**SEGUNDA DIFERENCIA**	**TERCERA DIFERENCIA**
1	1			
2	5	**4** (5 – 1)		
3	14	**9** (14 – 5)	**5** (9 – 4)	
4	30	**16** 30 – 14)	**7** (16 – 9)	**2** (7 – 5)
5	55	**25** (55 – 30)	**9** (25 – 16)	**2** (9 – 7)
6	91	**36** (91 – 55)	**11** (36 – 25)	**2** (11 – 9)

Esta tabla permite ahora determinar que la TERCERA diferencia es constante y por ende, la relación que liga a ambas variables es un polinomio de TERCER GRADO de la forma:

$$\mathbf{P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

Para determinar las constantes a, b, c y d basta resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{array}{l|}
\text{Si } x = 1: \quad a + b + c + d = 1 \\
\text{Si } x = 2: \quad 8a + 4b + 2c + d = 5 \\
\text{Si } x = 3: \quad 27a + 9b + 3c + d = 14 \\
\text{Si } x = 4: \quad \underline{64a + 16b + 4c + d = 30}
\end{array}$$

El conjunto solución del sistema: a = $\frac{1}{3}$, b = $\frac{1}{2}$, c = $\frac{1}{6}$ y d = 0 permite identificar el polinomio que liga a ambas variables:

$$\mathbf{P(x) = \frac{1}{3}\, x^3 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{6}\, x}$$

Pregunta Nº 11: ¿Qué situaciones de la vida cotidiana involucran parejas de variables relacionadas mediante polinomios de una variable real susceptibles de aplicarles esta técnica?

INSTANTE 5: LA INSTITUCIONALIZACIÓN DE LA GENERALIZACIÓN.

La(el) profesora(or) les pide que escriban de manera correcta y compendiada la generalización encontrada. Esto naturalmente implica usar técnicas de factorización de trinomios. Es probable que algunos estudiantes sólo factoricen por x. Si así ocurre se les debe insinuar el uso de la generalización:

> *Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrático en entonces puede expresarse factorizado en la forma $P(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática $P(x) = 0$ asociada al polinomio*

Finalmente el polinomio buscado es de la forma:

$$\mathbf{P(x) = \frac{x}{6}\,(x + 1)\,(2x + 1)}$$

Un interesante desafío que puede plantearse a los estudiantes es buscar otras expresiones para este polinomio. Una muy original expresión encontrada usando números combinatorios es:

$$\mathbf{P(x) = (x / 6)(x + 1)(2x + 1)} = \binom{x}{2} + \binom{x}{4} + 1$$

Encontrado el polinomio se puede pedir a los estudiantes que expresen la generalización o teorema involucrado en la forma "Si ocurre p, entonces ocurre q":

> Si x $\in$ IN entonces la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales es de la forma:
>
> $$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{x}{6}\,(x + 1)\,(2x + 1)$$

INSTANTE 6: ANÁLISIS DE LAS VARIABLES, DE SUS DOMINIOS Y DE SUS COMPONENTES.

La profesora(or) guía a los estudiantes a analizar la generalización hasta que ellos observen que, como se trata de una generalización algebraica, la única variable involucrada es x y su dominio es N, análisis que no es tan simple cuando se trata de una generalización geométrica.

De entre sus componentes principales se puede señalar los conceptos involucrados:

- Trinomio cuadrático en una variable real.
- Número natural
- Cuadrado de un número natural.

El símbolo de sumatoria, pese a que podría obviarse momentáneamente dependiendo del curso, es una importante componente de la generalización.

Pregunta Nº 12: ¿Qué actividades de aula y recursos didácticos o metodológicos permiten estimular la capacidad de análisis en los estudiantes?

INSTANTE 7: LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA INICIAL.

Con el polinomio encontrado, el problema inicial se reduce a instanciarlo para x = 8:

$$P(8) = \frac{8}{6}\ (8 + 1)(2 \text{ x } 8 + 1) \ = \ 204$$

INSTANTE 8: LAS COMPETENCIAS DE TIPO I Y DE TIPO II

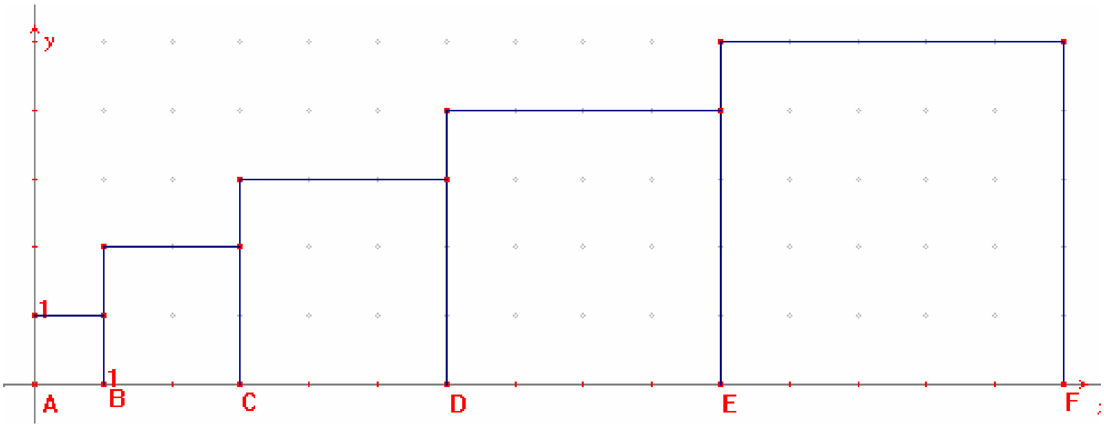
Ahora la(el) profesora(or) invita a los estudiantes a analizar y distinguir los dos tipos de competencias asociadas a toda generalización: las de Tipo I que corresponden a aquellas necesarias para emplear adecuada mente la generalización y las de Tipo II que corresponden a las nuevas competencias que surgen como consecuencia de haber conocido y estudiado la generalización. En este caso:

Tipo I: Reconocer números naturales y sus cuadrados; reconocer e interpretar correctamente el símbolo de sumatoria aplicado sobre una variable natural; instanciar con $x \in \mathrm{IN}$ expresiones como $(\frac{x}{6})$, (x + 1), (2x + 1).

Tipo II: Resolver problemas, como el del tablero de ajedrez u otros que involucren la suma de cuadrados de números naturales; resolver problemas como sumatorias de cuadrados de binomio con ambas variables en N que involucren sumas de cuadrados de números naturales, etc.
Es bueno hacer notar a los estudiantes las notables diferencias en términos de complejidad que se manifiestan, en este, caso entre ambos tipos de competencias.

INSTANTE 9: INTERPRETANDO EL TEOREMA

Este es también un importante instante donde la (el) profesora(or) busca que los alumnos puedan observar el teorema desde una perspectiva nueva. Como se trata de un teorema algebraico, lo más inmediato es buscar una perspectiva geométrica. Si construimos cuadrados de lados 1, 2, 3, etc. obtenemos una figura así:



Puede observarse que en el eje X las longitudes AB, AC, AD, AE, etc. corresponden a la suma de lo números naturales. ½ [n (n + 1)]. En cambio en el eje Y los valores corresponden a los números naturales n.

De este modo la suma de los cuadrados de los números naturales puede interpretarse como el área de los rectángulos de largo ½ [n (n + 1)] y ancho n, pero que en cada caso hay que restar la siguiente cantidad de cuadrados unitarios: 0 en el primero, 1 en el segundo, 4 en el tercero, 10 en el cuarto, 20 en el quinto, 35 en el sexto, 56 en el séptimo, y así sucesivamente.

De este modo el problema se reduce a determinar la generalización para esta nueva sucesión de cuadrados unitarios que hay que restar a los rectángulos ya formados:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	1	4	10	20	35	56

Al aplicar el método de las diferencias finitas resulta que la tercera diferencia es constante de valor 1 lo que indica que se trata de una expresión polinomial de grado 3:

$$P(X) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Al instanciar x para los valores 1, 2, 3 y 4 resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } x = 1 & a + b + c + d = 0 \\ \text{Si } x = 2 & 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ \text{Si } x = 3 & 27a + 9b + 3c + d = 4 \\ \text{Si } x = 4 & 64a + 16b + 4c + d = 10 \end{array}$$

Cuya solución es: $a=\frac{1}{6}$; $b = 0$; $c = -\frac{1}{6}$; $d = 0$

De esta manera la generalización que permite determinar el número de cuadrados unitarios que hay restar al área de cada rectángulo que contienen la suma de los cuadrados buscados es:

$$P(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$$

Ahora ya podemos determinar con exactitud el área acumulada por los cuadrados de lado 1,2, 3, etc.

$$P(n) = \frac{1}{2}\ [n\ (\ n + 1)\ ] - (\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{6}n)$$

Donde n es el número natural que corresponde a la cantidad sucesiva de números naturales elevados al cuadrado, considerados.

Al realizar la diferencia planteada resulta finalmente

$$P(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Que es la expresión sin factorizar del teorema ya institucionalizado.

Pregunta Nº 13: ¿De qué naturaleza son las interpretaciones más efectivas y con qué tipo de estudiantes resultan más eficaces?

INSTANTE 9: LA JUSTIFICACIÓN DEDUCTIVA.

Ahora la(el) profesora(or) hace notar que, a pesar de las verificaciones empíricas no es posible tener una certeza completa sobre la veracidad de la generación descubierta y que ello sólo se logrará después de haber realizado una demostración deductiva del teorema. Además, como se trata de un teorema con una variable en los números naturales, el tipo de argumento deductivo válido susceptible de ser utilizado es la demostración por inducción:

Se asume la existencia de un subconjunto V de IN que contienen a todos los números naturales que verifican el teorema y se continúa el proceso:

a) Verificar que 1 está en V:
b)

$$\sum_{x=1}^{1} x^2 = \frac{1}{6}(1 + 1)(2 \text{ x } 1 + 1) = \frac{1}{6}\ (2)\ (3) = 1$$

c) Asumir la hipótesis de inducción: existe un natural k para el cual se verifica el teorema. O sea, aceptar que V contiene a k

$$\sum_{x=1}^{k} x^2 = \frac{k}{6}\,(k+1)\,(2k+1)$$

Finalmente, a partir de esta hipótesis es necesario probar que el sucesor de k también está en V. Para ello bastará que aprovechemos el teorema aditivo de la igualdad en N y sumemos a ambos miembros de la igualdad la expresión $(k+1)^2$

$$\sum_{x=1}^{k} x^2 + \mathbf{(k+1)^2} = \frac{k}{6}\,(k+1)\,(2\,k+1) + \mathbf{(k+1)^2}$$

$$\sum_{x=k}^{k+1} x^2 = \frac{k}{6}\,(k+1)\,(2\,k+1) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k}{6}\,(k+1)\,(2\,k+1) + (k+1)\,(k+1)$$

$$= (k+1)\,[\,\frac{k}{6}\,(2\,k+1) + (k+1)\,]$$

$$= (k+1)\,[\,2\,\frac{k^2}{6} + \frac{k}{6} + k+1]$$

$$= \frac{k+1}{6}\,[\,2\,k^2 + 7\,k + 6]$$

$$= \frac{k+1}{6}\,[2(k+2)\,(k+\frac{3}{2})]^{8}$$

$$= \frac{k+1}{6}\,[2\,(k+2)\,(k+\frac{3}{2})]$$

$$= \frac{k+1}{6}\,(k+2)\,(2k+3)$$

$$= \frac{k+1}{6}\,(k+2)\,(2[k+1]+1)$$

lo que prueba la estabilidad de la expresión original cuando x es (k + 1).

---

[8] Las raíces de la ecuación cuadrática asociada: $2\,k^2 + 7\,k + 6 = 0$ son -2 , $-3/2$

Pregunta Nº 14: ¿Cuán desarrolladas están en nuestros adolescentes las estrategias de pensamiento inductivo y que recursos didácticos y/o medios permiten estimularlos tempranamente?

Este simple y breve ejercicio que permite establecer alrededor de 14 preguntas generadas desde un simple ejercicio de planificación didáctica y que pueden ser contestadas desde la investigación, deja en evidencia la gran responsabilidad que tenemos todos de estimular tan importante actividad científica.