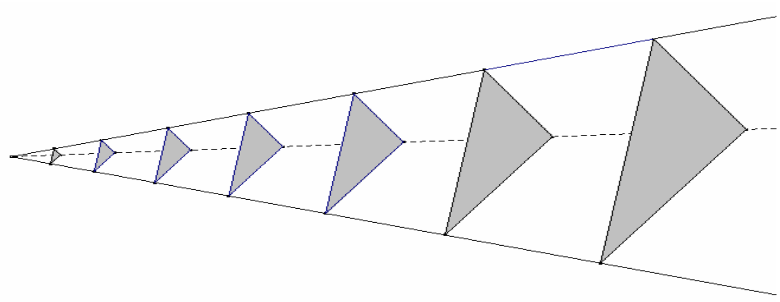
Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

Dirección Provincial de Educación, Curicó
VII Región

Taller



Aplicaciones de la semejanza

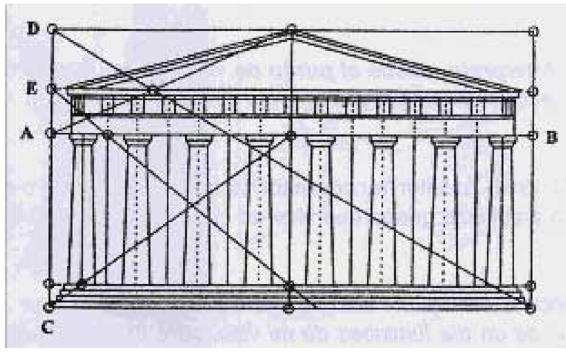
Aplicaciones de la semejanza

Profesores:

Juanita Contreras S.
Claudio del Pino O.

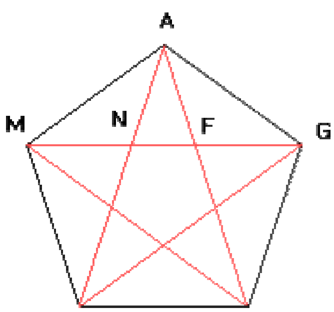
Agosto 2004

El Partenón griego



$$\frac{AC}{AD}=\phi \qquad \mathbf{y} \qquad \frac{CD}{AC}=\phi \qquad \frac{\phi+1}{\phi}=\phi \Rightarrow \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A LA DIVINA PROPORCIÓN

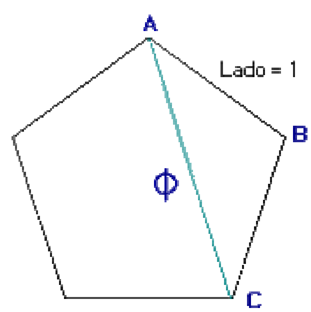


A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura,
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.

A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el Universo armónico origina.

A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.

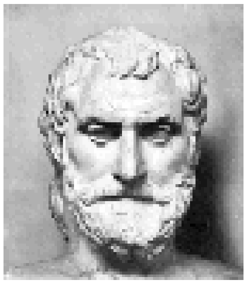
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.



Rafael Alberti,

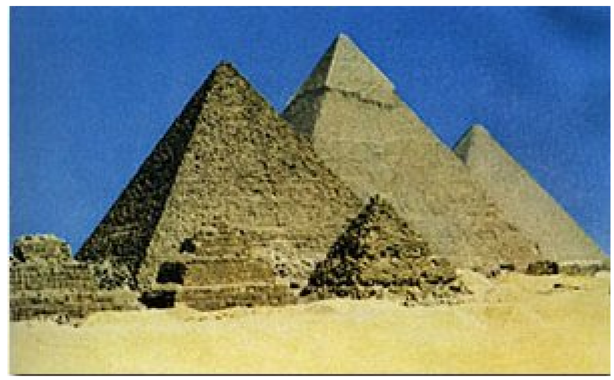
Índice

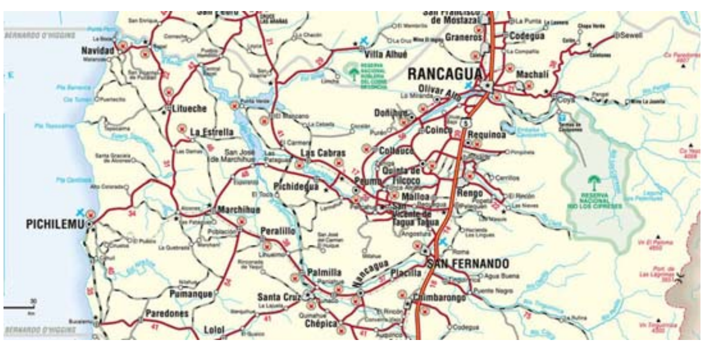
Introducción



En la Geometría Elemental, interesa de manera especial el estudio de aquellas propiedades de las figuras geométricas sometidas a transformaciones, siendo una de éstas la semejanza.

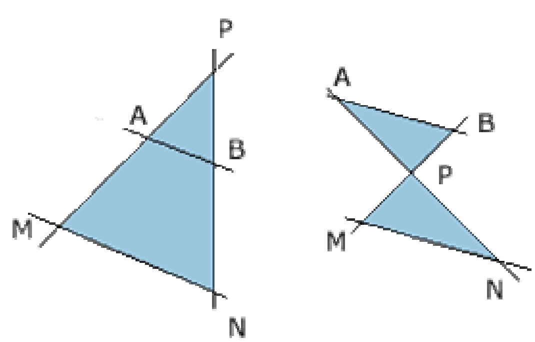
Al hablar de semejanza entre figuras geométricas, no se puede dejar de mencionar a Thales de Mileto, considerado uno de los siete sabios de la Grecia Antigua y uno de los precursores de la geometría griega. Se sabe que fue mercader y que estuvo en Egipto alrededor del año 585 a.C., entrando en contacto con los sacerdotes, quienes quedaron maravillados de su talento cuando calculó la altura de una pirámide comparando la longitud de su sombra con la sombra de vara de altura conocida, lo que supone un conocimiento de la proporcionalidad entre lados homólogos de triángulos semejantes, que es justamente el teorema que lleva su nombre.





Entre las aplicaciones de la semejanza se encuentran, la interpretación de planos, el estudio de mapas, la reproducción de dibujos, las fotografías,... las que tienen relación con el estudio de los elementos variables de las figuras sometidas a transformaciones de semejanza.

En este Seminario Didáctico, se presentan algunas actividades que tienen por finalidad establecer y analizar relaciones métricas de triángulos semejantes. Así se verá, por ejemplo, como varían el perímetro y el área de triángulos en función de la razón de semejanza entre sus respectivos lados. La comprensión de estas relaciones permitirá contar con herramientas más eficientes para entender algunas representaciones de la realidad y analizar con mayor certeza las relaciones métricas más importantes en el triángulo.



Actividad 1: ¿Cómo aprenden geometría nuestros estudiantes?

1) Como resulta obvio, un profesor de matemática, al momento de enseñar tópicos de geometría, no tendrá resultados adecuados si no sabe como aprenden geometría sus alumnos. Por esta razón lo invitamos a reflexionar grupalmente sobre algunas posibles respuestas a la pregunta:

¿Cómo piensan ustedes que aprenden geometría sus estudiantes?

2) A continuación, se les invita a leer el documento que se encuentra en Anexo 1.

3) Complementar el análisis desarrollado en la parte (a) con la lectura del documento.

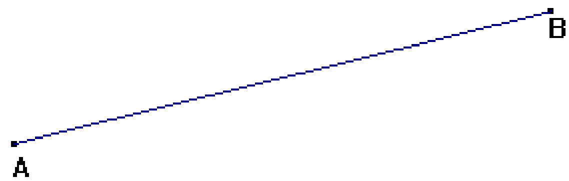
Actividad 2. Dividiendo un segmento en n partes iguales, siendo n un número natural.

Requisitos de contenidos:
- Razón entre segmentos
- Teorema de Thales

Materiales.
- Regla y compás, hoja de transparencia, lápices de transparencia, hojas de papel sin líneas (papel roneo), una hoja cuadriculada, calculadora.

1) Dividir un segmento dado, AB, en dos partes iguales.

- Construir un segmento AB, en una hoja de papel en blanco.



- El problema es, construir geométricamente el punto medio de AB.

  a) Resolver este problema:
     - Usando una hoja de transparencia, y una hoja cuadriculada.
     - Usando sólo la hoja donde se encuentra representado el segmento.
     - Usando regla y compás.

     - *Al finalizar esta actividad, compartir la(s) estrategia utilizada para resolver el problema, con cada uno de lo recursos*.

  b) Dar otros enunciados del problema planteado.
  c) Resolver el siguiente problema: Marcar el punto medio de uno de los lados del piso de la sala. ¿Qué recursos o materiales sugiere utilizar para resolver el problema?. Anotar la estrategia utilizada.

2) Dividir el segmento AB en 3 partes iguales.
- Construir un segmento AB, en una hoja de papel en blanco.

a) Enunciar el problema, en términos de una construcción geométrica.
b) Determinar la medida aproximada de cada una de las partes. Marcar los puntos de división en el segmento dado.
c) Resolver el problema, anotando la secuencia de pasos, en cada caso:
   - Usando una hoja de transparencia, y una hoja de papel cuadriculado.
   - Usando regla y compás.
   - Usando otra hoja de papel en blanco, mediante dobleces.

   Al finalizar la parte c), compartir la estrategia utilizada, con cada uno de lo recursos. Comentar sobre el uso de otros recursos para resolver el problema.

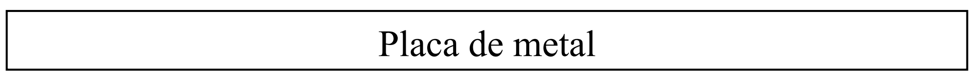
d) Dividir el segmento AB en **siete** partes iguales, usando cualquiera de los recursos sugeridos.

Actividades complementarias.

a) Un trozo de alambre se divide en 17 partes iguales.
   - ¿Cuántos puntos de división se deben determinar?.
   - Luego, se toma una de las partes, y se divide en 17 parte iguales. Este proceso se repite cuatro veces, y se toma uno de los trozos obtenidos de la división. Si la longitud de este trozo es 13cm. Determinar la longitud de trozo original.

b) Si se cortara un tronco (lineal) en siete trozos de igual longitud, cada trozo tendría una longitud de 22,3cm. ¿cuánto mediría cada trozo si se cortara en nueve trozos iguales?.
Si cada uno de los nueve trozos iguales mide M cm. ¿cuánto debería medir cada uno de los siete trozos iguales?.

c) Se debe marcar cuatro puntos alineados en una placa de metal rectangular de 1,4 metros de largo, uno tras otro, a una misma distancia. Las dos marcas laterales deben estar a 5cm del borde correspondiente. ¿Cómo resolver este problema?.

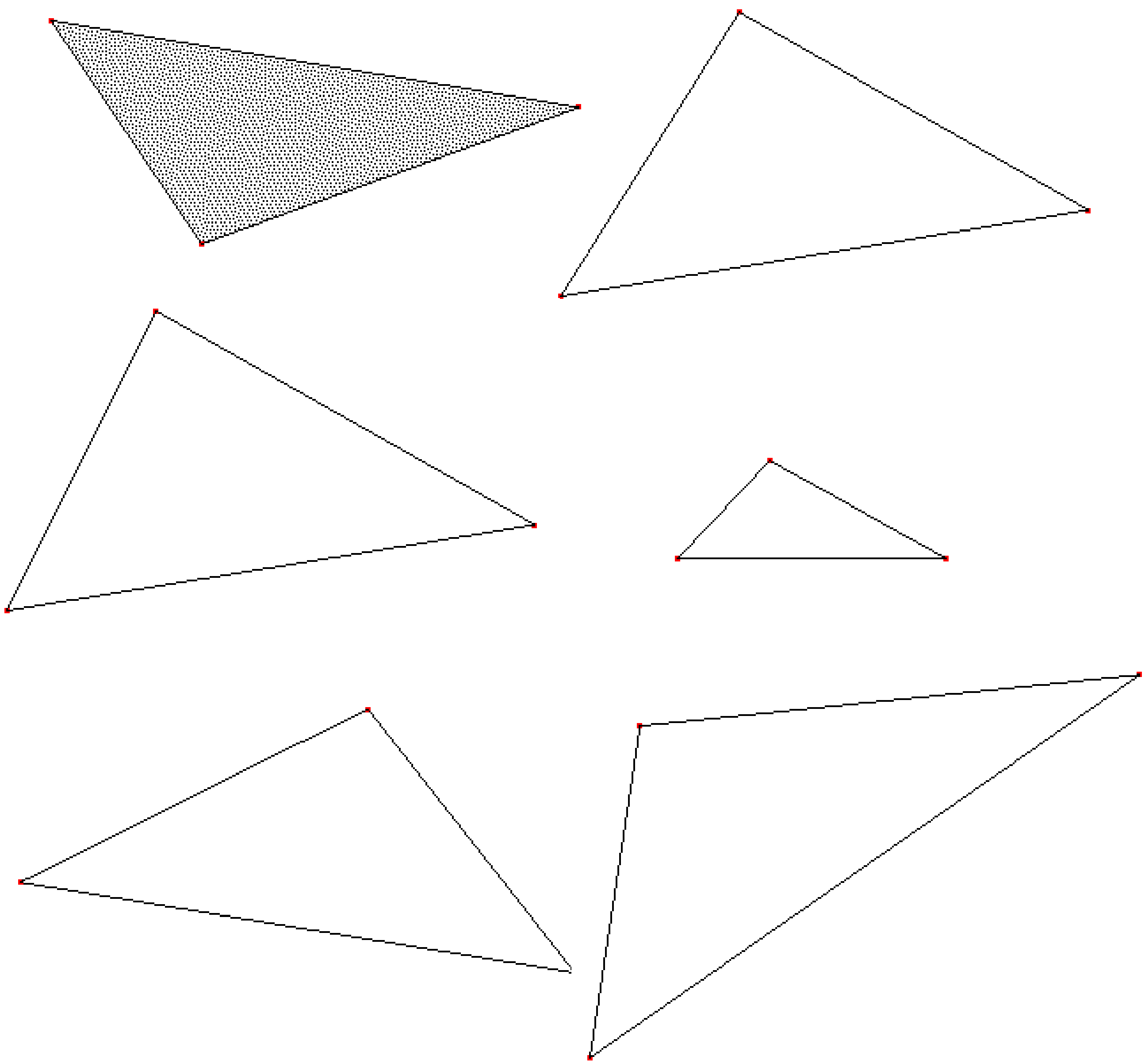


Actividad 3: Descubriendo propiedades de triángulos semejantes

Requisitos de contenidos:
- Conceptos de razón y proporción.
- Triángulos semejantes.

Materiales:
- Hoja de transparencia.
- Regla.
- Es recomendable, disponer de una calculadora para determinar los cuocientes que se indican.

Considerar los 6 triángulos siguientes:



a) Llamar T al primer triángulo. Copiar este triángulo en una porción transparencia. Usando esta copia del triángulo T, determinar cuáles de los restantes triángulos son semejantes a T.

b) ¿Qué triángulos son semejantes a T?. ¿En qué te basas?

c) Llamar, a, b, c; a los lados del triángulo T; y a los correspondientes lados homólogos a’, b’, c’; y a’’, b’’, c’’; de T’ y T’’ respectivamente. Completar la siguiente tabla:

	T	**T’**	**T’’**	***T/T’***	***T/T’’***	***T’/T’’***
lado	**a**	**a’**	**a’’**			
lado	**b**	**b’**	**b’’**			
lado	**c**	**c’**	**c’’**			

¿Qué se puede observar en las tres últimas columnas?. Ese cuociente constante, se llama *razón de semejanza*.

d) Dibujar un triángulo T con las medidas que quieras. Dibujar otro triángulo T’, semejante a T, y cuya razón de semejanza sea T/T’ = 1/2.
- Dibujar otro triángulo T’’, semejante a T, de modo que la razón de semejanza sea T’’/ T = 1/2.
- ¿Qué relación hay entre T’ y T’’?.

e) ¿Tiene que ver la razón de semejanza con el tamaño relativo de los triángulos?. ¿Qué ocurre con dos triángulos que tienen razón de semejanza igual a 1?.

Actividades de extensión:

a) Completar la siguiente tabla:

	T	**T’**	**T’’**	**T/T’**	**T/T’’**	**T’/T’’**
perímetro						
área						

¿Qué se puede observar en las tres últimas columnas?.

b) Usando propiedades de las fracciones, demostrar que si la razón entre los lados de 2 triángulos semejantes es *r*, entonces la razón entre los perímetros también es *r* y la razón entre sus áreas es r^2. Es decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P'} = r$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = r \quad \Rightarrow \quad \frac{\acute{a}rea\ (T)}{\acute{a}rea\ (T')} = r^2$$

c) **Verificación experimental del Teorema de Pitágoras**.
Construir, en una hoja de papel, un triángulo T cuyos lados midan b=8cm, c=6cm, y a=10cm. Comprobar que este triángulo es **rectángulo**. Sean A, B y C sus respectivos vértices. Sea H el pié de la altura relativa al lado BC.

– Obtener y recortar en una transparencia copias de los triángulos: ΔABH, ΔCAH y ΔCBA. Comprobar, por adecuadas superposiciones de sus ángulos, que estos triángulos son semejantes.

– Utilizando ΔABH y ΔCAH, medir cuidadosamente los lados HA, BH y HC y comprobar que:

$$HA^2 = BH \cdot HC. \qquad (1)$$

¿Cuál podría ser la causa, si en la comprobación precedente la igualdad obtenida no resulta exacta?.

Lo que se acaba de comprobar es un resultado importante, en el contexto de los triángulos rectángulos, conocido con el nombre de *Teorema de Euclides* o *Teorema de la altura*. Observar que lo que se ha realizado *no constituye una demostración*, pues se ha trabajando con medidas aproximadas y con un triángulo particular. Lo que se ha realizado es simplemente una corroboración *experimental* de la relación (1),

– Siguiendo la misma metodología de trabajo, utilizando los triángulos ΔCBA y ΔABH, comprobar que

$$BA^2 = BC \cdot BH. \qquad (2)$$

Lo que se acaba de comprobar es conocido con nombre de *Teorema del cateto*.

– Análogamente. verificar que:

$$AC^2 = HC \cdot BC. \qquad (3)$$

– ¿Qué relación se obtiene al sumar (miembro a miembro) las relaciones (2) y (3)?. Esta relación se conoce con el nombre de *Teorema de Pitágoras*.

d) Interrogantes adicionales:
– ¿Era necesario que el triángulo inicial fuera rectángulo?
– Si inicialmente se hubiese tomado otro triángulo rectángulo, es decir uno donde las medidas de sus lados fueran distintas a las de esta actividad, ¿se cumplirían también los resultados (1), (2) y (3)?
– Verificar que en un triángulo rectángulo arbitrario (de lados desconocidos), son válidas las relaciones (1), (2) y (3). Con esta verificación se comprueba que las relaciones (1), (2) y (3) son *teoremas*, ya que en este caso se ha comprobado que estas relaciones son válidas en *cualquier* triángulo rectángulo.

e) Otras interrogantes. Establecer si las siguientes sentencias son verdaderas o falsas. Justificar sus respuestas:

- Dos triángulos equiláteros son siempre semejantes.
- Dos triángulos isósceles son siempre semejantes.
- Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo igual, entonces son semejantes.
- Si dos triángulos son semejantes, entonces son homotéticos.
- Si dos triángulos isósceles tienen un ángulo igual, entonces son semejantes.
- Dos triángulos isósceles y rectángulos son siempre semejantes.
- Dos triángulos homotéticos son siempre semejantes.
- Dos triángulos rectángulos con sus catetos correspondientes proporcionales, son siempre semejantes.
- Dos triángulos rectángulos con un cateto y la hipotenusa correspondientes proporcionales, son siempre semejantes.

Observaciones finales:

- Esta actividad también se podría realizar trabajando con un compás o transportador.
- Luego de desarrollar las actividades, se sugiere revisar y sistematizar los conceptos y conclusiones obtenidas.
- Insistir que los resultados obtenidos, en las actividades realizadas midiendo con una regla, no constituyen una demostración formal.

Actividad 4: Semejanza, escala y planos.

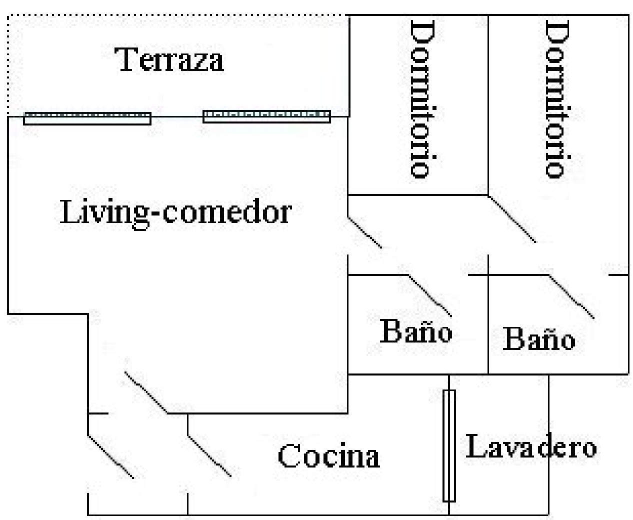
Requisitos de contenidos:
- Figuras semejantes.
- Razón de semejanza (escala).

Materiales:
- Regla.
- Calculadora.

Introducción: Cuando se desea hacer un estudio de alguna situación de la realidad, en general es difícil trabajar con los objetos directamente. Por ejemplo, analizar las partes de un avión, estudiar la estructura de un edificio, diseñar un condominio de casas, etc. Una manera de suplir este problema es trabajar con una representación del objeto que se desea estudiar, factible de llevarla a una hoja de papel. En los ejemplos precedentes, se podría trabajar, por ejemplo, con una foto del avión, con un plano del edificio, con un plano del terreno donde se quiere construir el condominio.

Los planos son dibujos con representaciones *semejantes* a la realidad que se estudia. La razón de semejanza es lo que se conoce como escala del plano. En esta actividad se trabaja sobre el plano de una casa.

Consideremos el siguiente plano de una casa:



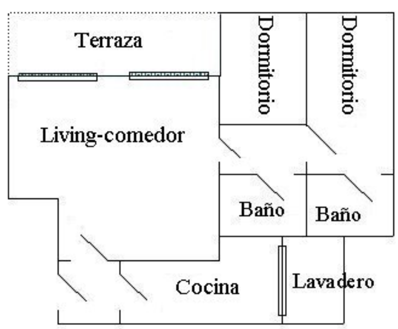
Plano 1

El plano 1 de la figura, como se sabe, es semejante a la distribución real de la casa.

Sabiendo que la terraza tiene 2 metros de ancho:

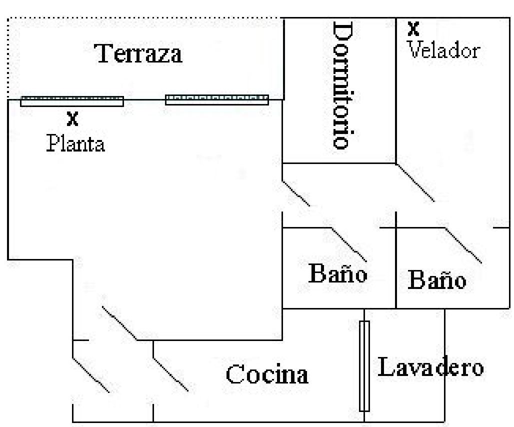
a) Determinar el factor de escala del plano 1.
b) Calcular los metros cuadrados que, aproximadamente, tiene el dormitorio más grande.
c) ¿Qué porcentaje del área de toda la casa, excluyendo la terraza, ocupa el dormitorio más grande?.
d) Para amoblar el living-comedor se dispone de los siguientes muebles:
   - Un mueble de 3 metros de largo por 50cm de ancho.
   - Dos muebles de 0.8m de fondo por 2m de largo.
   - Una mesa de centro de 60cm por 120cm.
   - Dos sillones que ocupan, aproximadamente, $0.4m^2$ cada uno.
   - Una mesa circular de 120cm de diámetro.
   - Dos mesitas que ocupan un poco menos que los dos sillones.

   Representar en papel, utilizando la escala del plano 1, todos los muebles disponibles para el living-comedor. Realizar, en el plano 1, distintas distribuciones de estos muebles. ¿Es posible realizar una distribución *razonable* de todos los muebles?. De no ser posible, ¿qué mueble(s) tú propondrías sacar del living-comedor?
e) Para el cumpleaños de la hija mayor, ésta desea hacer una fiesta en su casa. Si la fiesta se debe realizar usando el living-comedor y la terraza, ¿a cuántos amigos se podría invitar?
f) Determinar la escala del siguiente plano de la misma casa:



Plano 2

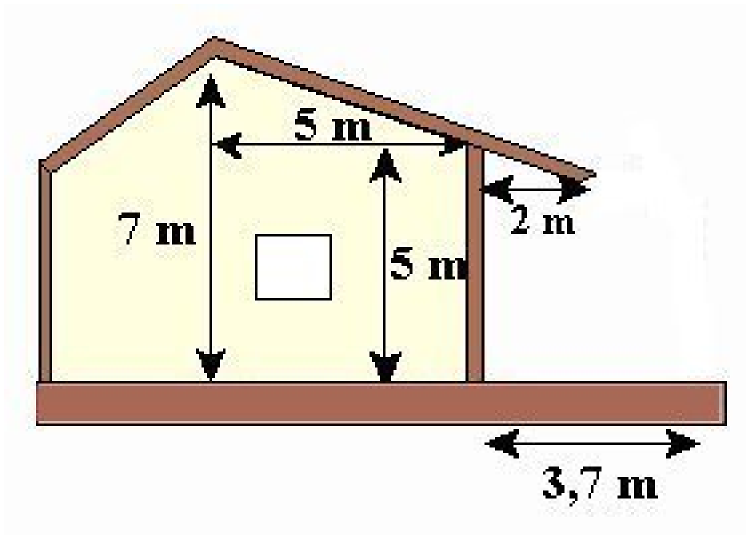
g) En el siguiente plano 3 de la misma casa, aparecen dos puntos por una **x**, que representan las posiciones de un velador y una planta.



Plano 3

i) Ubicar en el plano 1, la posición de la planta. Resolver este problema utilizando dos tipos de recursos: por ejemplo, transparencias, y con regla y compás, etc.
ii) Calcular las distancia entre las posiciones de la planta y el velador en el plano 2.
iii) ¿A que distancia se encuentra, en la casa, la planta de la puerta de ingreso a la cocina?

h) Una vista lateral de la casa (desde la derecha del plano anterior) viene dado en el siguiente dibujo:



Como se puede observar, actualmente la casa tiene un alero de 2m de extensión horizontal. Dicho alero está ubicado hacia el lado de la cocina y lavadero.

i. ¿Cuál es el factor de escala del último plano?
ii. Se desea extender este alero, de modo que cubra una extensión horizontal de 3,7m. ¿En cuánto deberá extenderse el alero?

Sugerencias metodológicas:

- Trabajar esta actividad con planos de las casas de los estudiantes.
- Luego de desarrollar las actividades, se sugiere revisar y sistematizar los conceptos y conclusiones obtenidas.

Actividad complementaria.
Hacer planos en una misma escala de canchas de fútbol, básquetbol, tenis, etc. y encontrar relaciones métricas entre ellas.

Actividad 5. Semejanza y fotocopiadoras.

Requisitos de contenidos.

- Nociones básicas de geometría.

Materiales.

- Una hoja en blanco.
- Regla.
- Compás o transportador.

La fotocopiadora es un buen recurso de la vida cotidiana de los estudiantes, que se puede usar como recurso para implementar actividades, en el tema de semejanzas. Actividades similares se pueden elaborar trabajando con retroproyectoras, fotografías, etc.

a) En una hoja en blanco realizar un dibujo. Para esta actividad consideremos el siguiente dibujo (Figura 1):

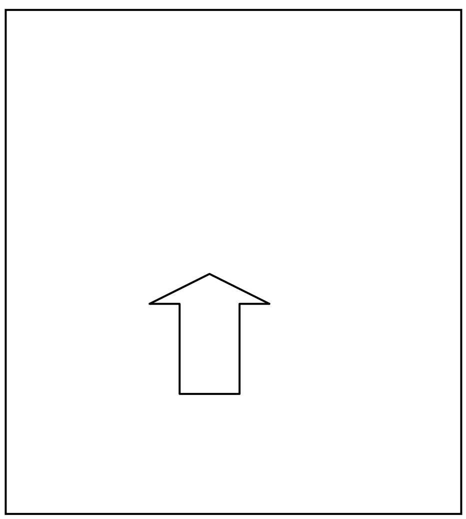


Figura 1

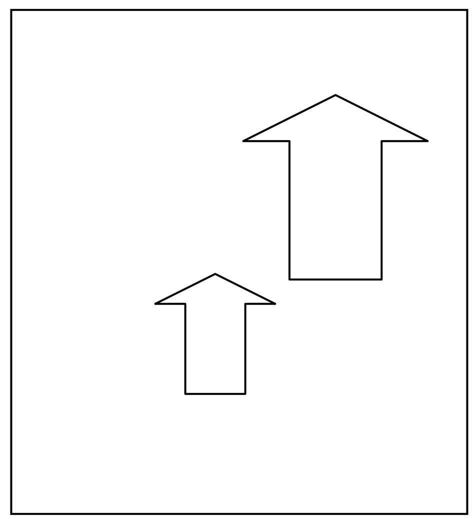


Figura 2

b) A continuación fotocopiarlo en una transparencia, ampliándolo un 125%. Luego, superponer la fotocopia con el dibujo original, de modo que se logre el efecto de la figura 2.
c) Medir algún segmento de la primera figura y su correspondiente en la fotocopia, luego dividir ambas longitudes. Repetir con otros segmentos. ¿Qué se puede observar?. ¿Qué resultado se debería obtener si la ampliación hubiese sido de un 200%?
d) Chequear, si al realizar la ampliación han variado los ángulos.
e) La fotocopiadora de un colegio solo puede disminuir ampliar hasta un 141%.
   - Con esta fotocopiadora, ¿es posible aumentar una figura hasta el doble?.
   - ¿Por qué se fijó el límite de ampliación en 141%?.
   - ¿Qué relación tiene con el hecho que $\sqrt{2} \approx 1.41$?.

Nota: En geometría se dice que la figura obtenida en la fotocopia es semejante a la figura original y que la razón de semejanza es 1.25.

Actividad 6. Mecanismos Articulados

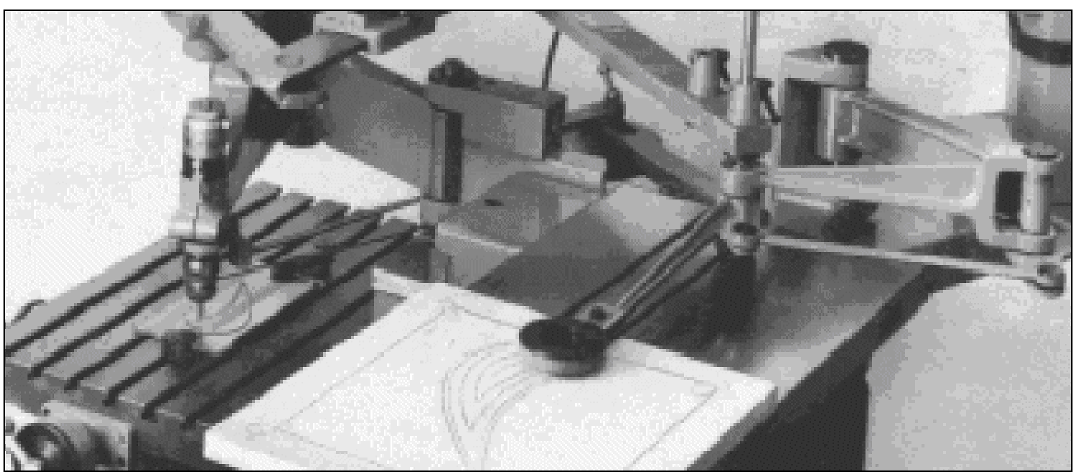
Requisitos de contenidos.
- Semejanza de triángulos
- Teorema de Thales

Materiales.
- Regla y compás.
- Deseable, una calculadora.

Son sistemas o mecanismos que permiten realizar ciertas transformaciones o trazar determinadas curvas. Desde la antigüedad, los matemáticos griegos imaginaron mecanismos para resolver problemas que no podían resolverse con regla y compás, como por ejemplo, el problema de la trisección de un ángulo y la duplicación un cubo. Estos eran mecanismos con deslizamiento, que resolvían de manera aproximada estos problemas. Sin embargo, el primero de los mecanismos articulados verdadero[1] es sin duda el *pantógrafo* atribuido a Scheiner y Langlois (1603). Existen varios tipos de pantógrafos, pero todos tienen el mismo fundamento.

1. El pantógrafo.

Es un instrumento para dibujar una figura plana semejante a una dada. Es decir, permite reducir o ampliar una figura, en una razón dada. Se utiliza a menudo en Cartografía, para el trabajo con mapas y planos, para grabar placas, insignias de metal, etc.



Construcción del pantógrafo.

Se compone de cuatro reglas (madera o de un *Mecano*) que forman un paralelógramo articulado, que se ensamblan en los puntos B, C, D y P como se muestra en la figura:

[1] Según Henri Michel, *Les instruments de mesures*, 1980.

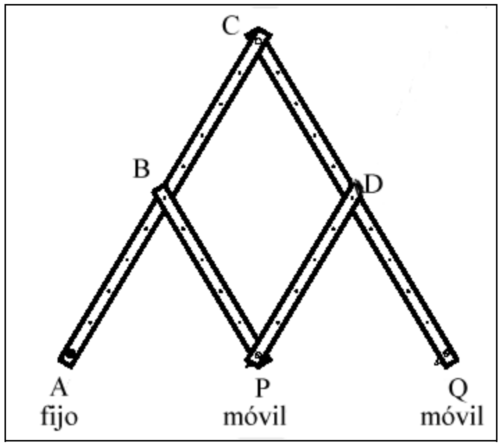


Figura 1

de manera que:

- BC=PD, CD=BP, y los puntos A, P y Q son colineales.
- En los puntos B, C y D se usan sujetadores o tornillos.
- El punto A se fija en el plano.
- En el punto P se coloca una punta o una aguja gruesa, para dibujar una figura F, o para recorrer una figura dada.
- Los puntos P y Q son movibles (pero siempre están alineados con A).
- En el punto Q se coloca un lápiz, que permite trazar la figura semejante F', a la figura F. (Notar que las figuras F y F' son homotéticas respecto del punto A).

a) Determinar la razón $\dfrac{AP}{AQ}$ en el pantógrafo de la figura 1. Justificar su respuesta.

b) Considerar en el siguiente pantógrafo

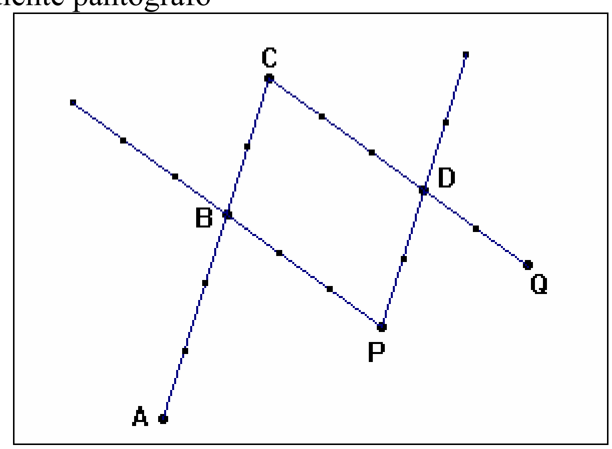


Figura 2

1º) Determinar la razón de semejanza del pantógrafo. Justificar su respuesta.
2º) Si la punta P traza un segmento de 14cm ¿Cuál es la longitud del segmento que dibuja Q?.
3º) Si la punta P traza un triángulo de 16cm de perímetro ¿Cuál es el perímetro del triángulo que dibuja Q?.

4º) Si la punta P traza un triángulo de 10cm^2 de área ¿Cuál es el área del triángulo que dibuja Q?.
5º) Si al trazar P un segmento, Q dibuja un segmento de longitud 22cm ¿qué longitud tiene el segmento trazado por P?
6º) Es posible re-armar este pantógrafo, para obtener una razón de semejanza 3:5. ¿Qué sucede si en P se coloca el lápiz y en Q la punta?.
7º) ¿Qué otras razones puede obtener, re-armando este pantógrafo?.

c) Dado un pantógrafo tal que AB mide 14cm y BC mide 24 cm.
d) Realizar las cinco primeras actividades del ítem anterior.
e) Diseñar, con regla y compás, un pantógrafo con razón 3:7.

Actividad complementaria: Construcción de pantógrafos.
Para el profesor:

- Anotar una lista de materiales que sugiere para su construcción.
- Señalar algunas especificaciones del (de los) pantógrafo(s) requeridos.
- Indicar datos que debe contener el informe.
- Enunciar actividades que se debería realizar usando el pantógrafo.

2. La máquina de Platón

Platón[2] (429-347 a.C.) construyó un instrumento mecánico formado por dos reglas paralelas, una regla fija y una regla móvil.

Esta última se puede deslizar paralelamente a la regla fija, entre dos soportes fijos perpendiculares a la recta fija. Ver *figura* 1.

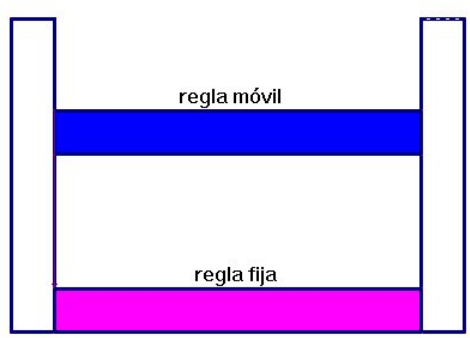


Figura 1

Este instrumento permite resolver mecánicamente el problema de la duplicación del cubo, uno de los tres famosos problemas de los antiguos griegos, imposible de resolver con regla y compás. El enunciado del problema de *La duplicación de un cubo* es: dado un cubo de arista a, construir usando sólo una regla y un compás, la arista $\boldsymbol{x}$ de un cubo cuyo volumen sea $2\,a^3$.

El principio de uso de este instrumento, es:

[2] Platón nació en Atenas, Grecia, en el año 427 a.C. y murió en 347 a.C.

- Construir dos rectas perpendiculares en O (ver figura 2), y los segmento OA y OB.
- Colocar este instrumento encima de la figura 2, ajustándolo cuidadosamente, como en la figura 3.

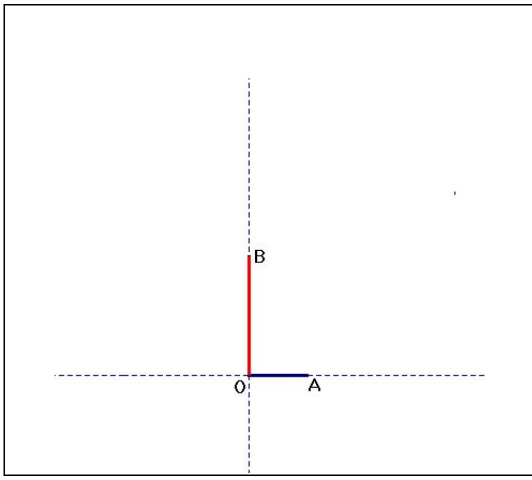


***Figura* 2**

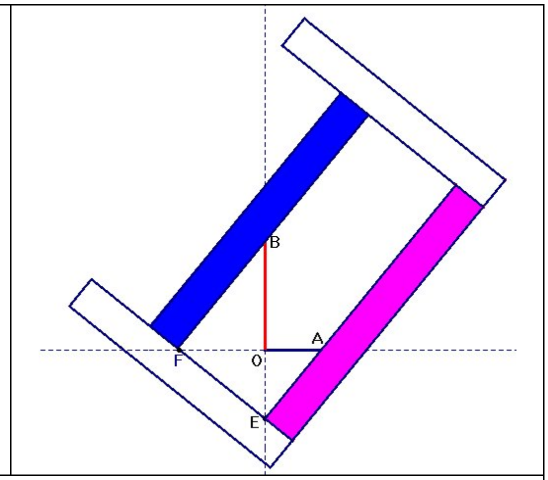


***Figura* 3**

a) Probar las siguientes relaciones:
   i) $\frac{OA}{OE} = \frac{OE}{OF}$, ii) $\frac{OE}{OF} = \frac{OF}{OB}$, iii) $\frac{OA}{OE} = \frac{OE}{OF} = \frac{OF}{OB}$.

b) Si la medida de OA es 1cm y la medida de OB es 2cm. Determinar OE^3 .
c) Si la medida de OA es a y la medida de OB es $2a$. Determinar una relación entre OE y OA.
d) Dar una justificación de porqué este mecanismo resuelve mecánicamente, el problema de la duplicación del cubo.

Actividades de extensión.

1. Investigar sobre otros mecanismos articulados para resolver el problema de la duplicación del cubo.
2. Investigar sobre mecanismos articulados para resolver el problema de la trisección del ángulo.

ANEXO 1:
Niveles de razonamiento de van Hiele.

Dina Van Hiele y Pierre Van Hiele-Geldof, formularon a mediados del año 1950, una teoría sobre los niveles de razonamiento en geometría, que luego de múltiples investigaciones posteriores resultó ser una propuesta, que explicaba adecuadamente las principales dificultades que tienen nuestros estudiantes con el estudio de la geometría.

Esta teoría está formulada en niveles de razonamiento geométrico, de aquí entonces la explicación del fracaso de muchos profesores al enseñar geometría, radica en el hecho que él enseña geometría en un nivel, generalmente más elevado que el nivel en el que se encuentran sus alumnos. Por lo tanto*, los alumnos no entienden a su profesor ni el profesor entiende porqué sus alumnos no entienden*.

La teoría de Van Hiele contempla 5 niveles. Las principales características de cada uno de estos niveles son:

Nivel 1: **Visualización**	Los alumnos reconocen figuras visualmente por su apariencia global. Por ejemplo, reconocen triángulos, cuadrados, paralelogramos, etc. por su forma, pero no reconocen propiedades ni componentes. Las figuras geométricas son reconocidas por su forma como un todo, esto es, por su apariencia física y no por sus partes o propiedades.
Nivel 2: **Reconocimiento y Análisis**	En este nivel, los estudiantes comienzan un análisis de los conceptos geométricos. Por ejemplo, a través de la observación y la experimentación los estudiantes empiezan a discernir las características de las figuras. Estas propiedades que surgen se usan para conceptualizar clases de formas.
Nivel 3: **Deducción informal**	Aquí, los estudiantes pueden establecer las interrelaciones en las figuras (por ejemplo: en un cuadrilátero, para que los lados opuestos sean paralelos, es necesario que los ángulos opuestos sean iguales) y entre figuras (un cuadrado es un rectángulo por que tienen todas sus propiedades). Así, se pueden deducir propiedades de una figura y reconocer clases de figuras. Se entiende la inclusión de clases, por ejemplo, {cuadrados} $\subseteq$ {rectángulos}. Las definiciones adquieren significado. Sin embargo, los estudiantes en este nivel, no comprenden el significado de la deducción como un todo ni la necesidad de los axiomas. Algunos resultados obtenidos de manera empírica se usan a menudo conjuntamente con técnicas de deducción. Se pueden seguir pruebas formales; pero los estudiantes no ven como el orden lógico podría ser alterado ni perciben tampoco cómo articular una demostración a partir de premisas diferentes.
Nivel 4: **Deducción formal**	En este nivel los alumnos entienden el significado de la deducción como una manera de establecer una teoría geométrica en un sistema

	axiomas, postulados, definiciones. Los teoremas y demostraciones son comprendidos. Los alumnos pueden construir, y no sólo memorizar, demostraciones, perciben la posibilidad del desarrollo de una prueba de varias maneras, entienden la interacción de condiciones necesarias y suficientes y distinguen entre una afirmación y su recíproca.
Nivel 5: **Rigor**	En este nivel los alumnos pueden trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos. Pueden estudiarse geometrías no euclidianas y compararse diferentes sistemas. La geometría se capta en forma abstracta.

Propiedades del Modelo: La propuesta de los Van Hiele, incorpora además una serie características del modelo, las que se constituyen en elementos fundamentales a la hora que el profesor planifica sus acciones didácticas. Estas características han sido confirmadas por varias investigaciones posteriores. Ellas son:

Secuencial	Un alumno no puede alcanzar un nivel, sin haber pasado por el nivel precedente.
Adyacencia	En cada nivel de pensamiento, lo que era intrínseco en el nivel precedente, se vuelve extrínseco en el nivel actual.
Distinción	Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y su propia red de relaciones que conectan esos símbolos.
Separación	Dos personas que razonan en niveles diferentes no pueden entenderse

Como una teoría sin práctica no es de mucha utilidad, los van Hiele, formularon una propuesta concreta de actividades *para cada nivel*, basada en la teoría constructivista, para guiar los procesos de enseñanza de los profesores de matemática, de modo de permitir el avance de los estudiantes por los niveles de pensamientos que habían identificado. Esta propuesta es conocida con el nombre de:

Fases del modelo de Van Hiele.

1) **Información**:
Su finalidad es la obtención de información recíproca entre profesor y alumno. El profesor indaga qué saben sus alumnos sobre el tema que va a abordar y la forma que tienen de razonar. Los alumnos, por su parte, entran en contacto con el objetivo de ese nivel para ese concepto.

2) **Orientación dirigida**:
El profesor dirige a sus alumnos para que vayan descubriendo lo que va a constituir lo esencial de ese nivel. Esta fase es una de las más importantes de toda la instrucción, pues

permite pasar de un nivel a otro al lograr que los estudiantes construyan los elementos fundamentales del nivel. La dirección del profesor consiste en planificar las situaciones que les permitirá a sus estudiantes establecer las características básicas del nivel.

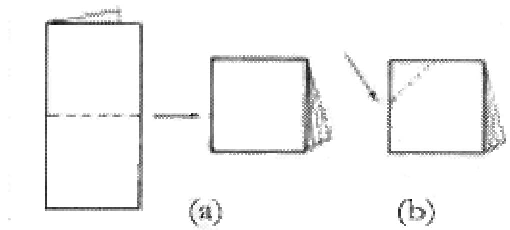
3) **Explicitación**:
Su objetivo es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas y que consoliden el vocabulario propio del nivel. Las actividades deben hacer que los estudiantes expresen, verbalmente o por escrito, lo que han descubierto. Se deben fomentar los diálogos: profesor-alumnos y alumnos-alumnos.

4) **Orientación libre**:
El objetivo de esta fase es consolidar los aspectos básicos del nivel. Las actividades propuestas a los estudiantes deben desafiarlos a resolver situaciones nuevas usando los conocimientos que han adquirido previamente. En esta fase los objetivos básicos del nivel se asumen superados (en la fase 2).

5) **Integración**:
Esta fase tiene por objetivo establecer y complementar la red de relaciones de ese nivel, para el concepto que se trabaja. El profesor debe proponer resúmenes de lo aprendido y, inevitablemente, exigir memorizar los resultados más importantes.

Para terminar se ejemplifica, trabajando sobre el rombo, las posibles actividades que podría realizar un profesor en cada una de las fases recién señaladas.

Fase 1: Información	El profesor pregunta a los estudiantes: ¿Qué es un rombo?, ¿Es un cuadrado?, ¿Es un paralelogramo?, ¿qué es lo que el tiene en común con un cuadrado (paralelogramo)?, ¿Que diferencias hay entre un cuadrado (paralelogramo) y un rombo?, ¿Creen ustedes que un cuadrado podría ser un rombo?, ¿Un rombo podría ser un cuadrado?, ¿cómo dirían ustedes eso?...
Fase 2: Orientación dirigida	El profesor podría pedir a los estudiantes que usen un geoplano para construir un rombo, con diagonales iguales, para construir otro más grande, para construir un tercero más pequeño. Otra actividad podría consistir en pedir la construcción sucesiva de rombos que tengan respectivamente cuatro, tres, dos, y un ángulo recto.
Fase 3: Explicitación	Los estudiantes discuten entre ellos y con el profesor qué figuras y propiedades surgieron de las anteriores enlistadas.

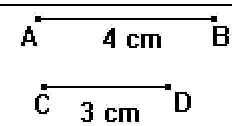
Fase 4: Orientación libre	Una posible actividad podría ser: "Doble una hoja de papel a la mitad, haga un segundo doblez a la mitad, como se muestra figura (a). Trate de imaginar que figura obtendría si corta una de las esquinas del doblez (figura b). Justifique su respuesta antes de cortar. ¿Qué tipo de figuras obtiene si hace un corte en la esquina con un ángulo de 30°?, ¿Y si lo hace con uno de 45°?. Describa los ángulos y el punto de intersección de las diagonales. El punto de intersección, ¿qué es de las diagonales?. 
Fase 5: Integración	Los estudiantes repasan y resumen lo que han aprendido con la meta de formación de un panorama de las nuevas redes de objetos y relaciones. El profesor puede apoyarse en estas síntesis, "proporcionando perspectivas globales" de lo que los estudiantes han aprendido. Es importante, sin embargo, que esos resúmenes no representen algo nuevo. Las propiedades del rombo que han surgido serían resumidas y sus orígenes revisados.

Al final de la quinta fase, se espera que los estudiantes hayan alcanzado un nuevo nivel de pensamiento. El nuevo dominio de pensamiento reemplaza al viejo y están listos para repetir las fases de aprendizaje en el siguiente nivel.

Una consulta final: ¿En qué nivel de razonamiento, de la escala del modelo de los Van Hiele, se ubican las actividades del ejemplo anterior?

ANEXO 2:
Resumen de contenidos

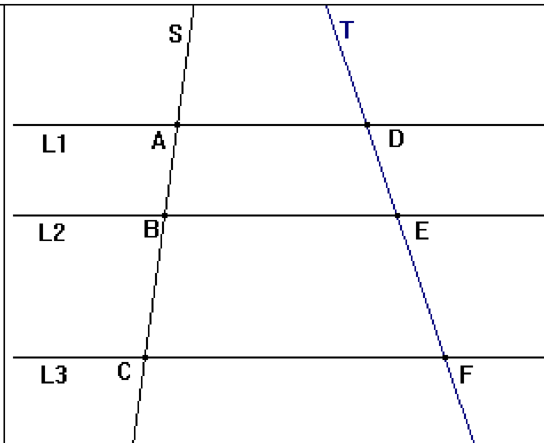
Conceptos básicos.

1) Razón. Es el cuociente entre dos números positivos.	Por ejemplo 3 : 7
2) Razón de dos segmentos. Es el cuociente de los números que expresan las longitudes de dichos segmentos, ambos medidos con la misma unidad.	 Los segmentos AB y CD están en la razón 4 : 3. $\frac{AB}{CD}=\frac{4}{3}$
3) Proporción. Es una igualdad entre dos razones.	Por ejemplo: 3 : 7 = 9 : 21 o bien: $\frac{3}{7}=\frac{9}{21}$
4) Segmentos proporcionales. Dos segmentos son proporcionales a otros dos segmentos, si y sólo sí, la razón entre los dos primeros segmentos, es igual a la razón de los dos últimos.	Los segmentos a y b son proporcionales a los segmentos c y d, cuando: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
5) Dados los segmentos *a, b, c* y *d*. En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se denominan:	**Cuarta proporcional.** Si *a, b, c* y *d* son distintos, cada uno de los segmentos es una *cuarta proporcional* geométrica de los otros tres.
	Tercera proporcional. Si $b=c$, los segmentos *a* y *d*, se denominan *tercera proporcional*
	Media proporcional. Si $b=c$, el segmento *b* se llama *media proporcional* entre *a* y *d*.
6) Razón áurea o razón dorada. Es una razón muy especial que aparece frecuentemente en la naturaleza y en el arte.	**Valor exacto de la razón dorada** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **Valor aproximado de la razón dorada** 1.6189

Teorema de Thales.

7) Teorema. Si tres o más rectas paralelas se cortan por dos rectas secantes, los segmentos de las rectas secantes, determinados por las rectas paralelas, son proporcionales.

L1 || L2 || L3
S y T rectas secantes $\Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$

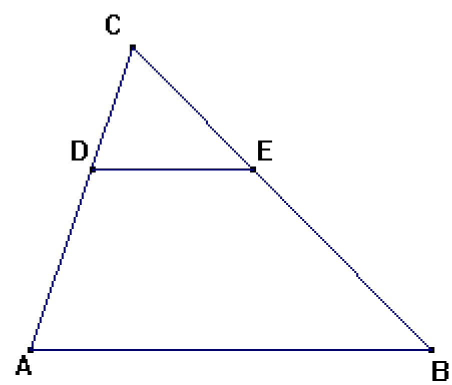


Nota. Alternando o invirtiendo y componiendo esta proporción resultan otras proporciones. Encontrar algunas de ellas.

Aplicado a un triángulo.

8) Teorema. Toda paralela a un lado de un triángulo, determina en los otros dos lados segmentos proporcionales.

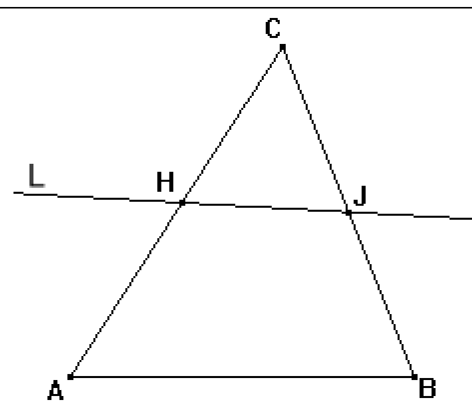
DE || AB $\Rightarrow \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BE}{EC}$



9) Recíproco. Toda recta que determina segmentos proporcionales en dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado.

L recta que intersecta en H y J a los lados AC y BC respectivamente.

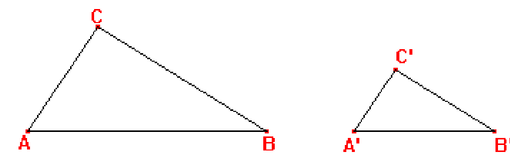
$\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{BJ}{JC} \Rightarrow$ L || AB



Triángulos semejantes

10) Definición. Dos triángulos son *semejantes*, cuando tienen los mismos ángulos.

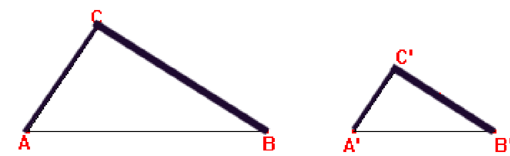
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \\ \angle C = \angle C' \end{array}$$



11) Teorema.
Dos triángulos son semejantes, si y sólo si, tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

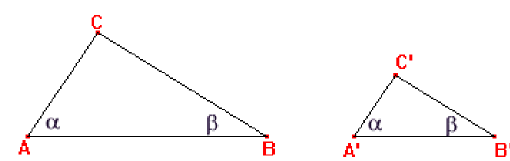
Esta razón constante se denomina *razón de semejanza*.



12) Observaciones.

1. En triángulos se tiene:
   Dos triángulos son semejantes $\Leftrightarrow$ tienen todos sus ángulos correspondientes iguales $\Leftrightarrow$ sus lados correspondientes son proporcionales.

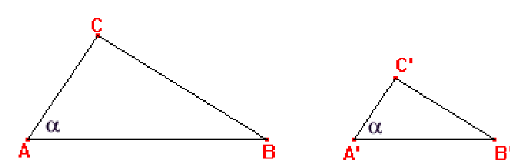
   Nota. Los lados opuestos a ángulos iguales se denominan lados homólogos.



2. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente iguales.
   En particular:
   $\angle A = \angle A'$ y $\angle B = \angle B' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

3. Un criterio de semejanza. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual, comprendido entre lados proporcionales.
   En particular:

$$\angle A = \angle A' \text{ y } \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

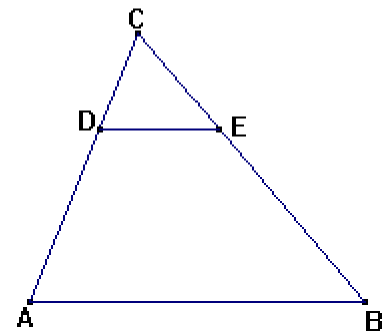


13) Teorema. Toda recta paralela a un lado de un triángulo determina un segundo triángulo semejante al primero.

En particular:

$$DE \parallel AB \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta DEC$$

Nota. El recíproco de este teorema también se cumple.



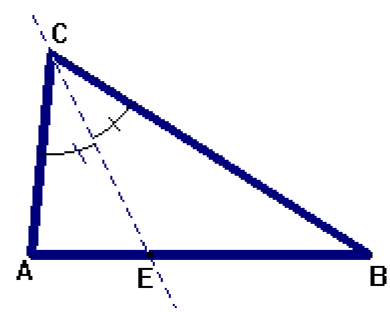
La circunferencia de Apolonio.

14) Teorema de la bisectriz interior. La bisectriz de cada ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto, en dos segmentos proporcionales a los lados del triángulo.

En particular:

Si E es el punto donde la bisectriz interior del ángulo con vértice C del triángulo ABC intersecta al lado AB, entonces:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$$

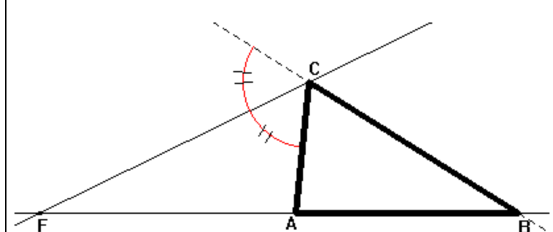


15) Teorema de la bisectriz exterior. La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide exteriormente al *lado* opuesto, en dos segmentos proporcionales a los lados del triángulo.

En particular:

Si F es el punto donde la bisectriz exterior del ángulo con vértice C, intersecta al lado que contiene a AB, entonces:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$$

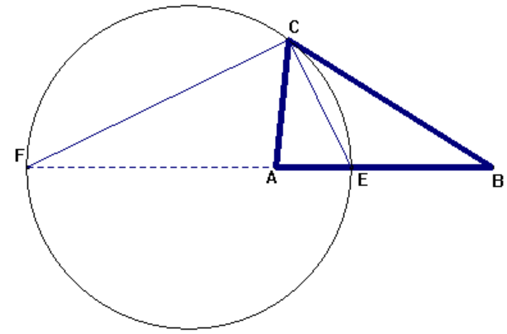


16) Teorema.

Dados dos puntos A y B en el plano y una razón $\frac{r}{s}$.

El lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tales que, PA : PB = *r : s*, es la circunferencia de diámetro EF, donde E y F son los puntos en la recta AB, que dividen interior y exteriormente al segmento AB en la razón $\frac{r}{s}$.

(Nota. E y F dividen armónicamente el segmento AB)



Nota. Se dice que los puntos E y F dividen armónicamente el segmento AB en la razón dada $\frac{r}{s}$.

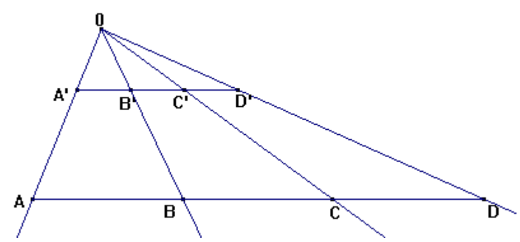
17) Definición. La circunferencia del teorema anterior se denomina *Circunferencia de Apolonio*.

Haz de rectas cortado por paralelas.

18) Teorema. Si un haz de rectas concurrentes a un mismo punto O, es cortado por dos rectas paralelas, estas paralelas quedan divididas en segmentos proporcionales.

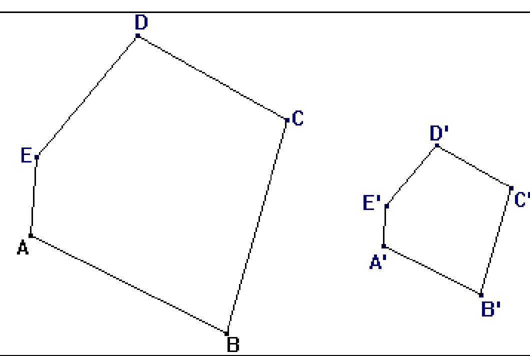
En particular:
Si AO, BO, CO son rectas concurrentes en O
AD || A'D', entonces:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \ldots$$



Polígonos semejantes

19) Definición. Dos polígonos de un mismo número de lados son semejantes, cuando los ángulos de uno de ellos son respectivamente iguales a los ángulos del otro, y cuando tienen sus lados homólogos proporcionales.



Nota. En general, dos figuras son semejantes, si y sólo si, una de ellas es un modelo a escala de la otra.

Bibliografía

- Acuña, S., Arellano, M., Baraona, R. [1999]. *Semejanza de Triángulos con Cabri*. Trabajo Final Post-título. Universidad de Talca.
- Alsina, C., Trillas, E. [1984]. *Lecciones de Algebra y Geometría*. Editorial Gustavo Gill, S.A.
- Braga, M. (1991). *Apuntes para la enseñanza de la geometría*. Signos, Teorías y Prácticas de la educación. Número 4, páginas 52 - 57. Julio – Diciembre.
- Clemens, et all. [1998]. *Geometría*. Addison Wesley L.
- Coxeter, H. [1971]. *Fundamentos de Geometría*, Centro Regional de Ayuda Técnica. México.
- Crowley, M. El *modelo Van Hiele de desarrollo de pensamiento geométrico*. Hemeroteca Virtual ANUIES, http://www.hemerodigital.unam.mx/ANUIES
- Cuppens, R. [1996]. Faire de la geometrie en jouant avec Cabri-Geometre. Publication de l'APMEP.
- de Villiers, M. (1999). *Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría*. La lettre de la preuve, Novembre-Decembre.
- García J., Bertran, C. [1988]. Geometría y experiencias. Addison Wesley
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995) *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gutiérrez, J. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele*, en S. Linares, M. V. Sánchez (editores), Teoría y práctica en educación matemática. Alfar. España.
- Pérez, D. *Del plano a la escala*. http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/7124/Planoescala.htm
- Riera, G. [2000]. Matemática 2do medio. Editorial Zig-Zag.

Conexiones Internet:

- *Homotecias y semejanza*. http://www.iesarroyo.com/matematicas/materiales/4eso/geometria/homoteciasysemejanzas/homoteciasysemejanzas.htm
- *Mediciones indirectas*: http://www.arrakis.es/~mcj/medidas.htm
- *Concepto de Semejanza de triángulos*. Apuntes on line. http://www.itcr.ac.cr/revistamate/GeometriaInteractiva/IIICiclo/NivelIX/ConceptodeSemejanza/SemejanzadeTriangulos.htm
- *Mecanismos articulados* http://personal.telefonica.terra.es/web/jmora7/Archiv/97salamtriang.PDF
- *Sitio oficial software CABRI*. http://www.cabri.net
- *Sitio Descartes*. http://www.cnice.mecd.es/Descartes/indice_ud.htm