Taller
Profesores: Juana Contreras S. - Claudio del Pino O.

Optimización

Las abejas, en virtud de una cierta intuición geométrica, saben que el hexágono es mayor que el cuadrado y que el triángulo, y que podrá contener más miel con el mismo gasto de material.
Pappus de Alejandría

Introducción.

En muchos y variados ambientes, tanto la naturaleza como el hombre, busca optimizar sus recursos. La optimización tiene dos caras: maximizar y minimizar. En general, la idea que está detrás de la optimización, es tratar de obtener *lo más con lo menos*.

Algunos ejemplos:

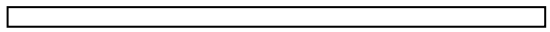
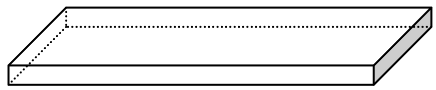
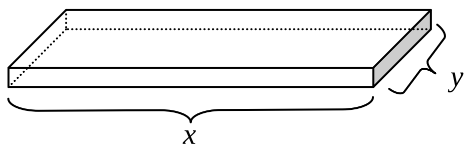
- Dada una placa rectangular, construir una caja de *máximo* volumen.
- En un proceso productivo, obtener un cierto ingreso con el *mínimo* costo.
- Con una cerca de longitud dada, cercar un terreno rectangular de área máxima.
- Considerando los diferentes flujos vehículares de las calles de una ciudad, buscar el camino que minimiza el tiempo empleado para ir en auto de la casa al trabajo.
- Determinar el punto de una carretera que se encuentra más cerca de una casa.
- De un tronco de un árbol, cortar una viga que tenga la *máxima* resistencia.
- Determinar el ángulo de disparo para que un proyectil alcance la *máxima* altura.
- En una bodega los paquetes se ubican de manera de minimizar el espacio ocupado.
- La luz se desplaza de un punto a otro en el *mínimo* tiempo.
- Las hojas de algunos árboles, se disponen de tal manera de *maximizar* su contacto con la luz del sol.

En general, en un proceso de optimización hay algún elemento que se desea optimizar, el cual está inserto en un ambiente que presenta ciertas restricciones. Para modelar matemáticamente, un problema de optimización, el elemento que se desea optimizar se traduce en una función (que para nuestros efectos será de una variable, es decir de la forma usual: $y=f(x)$), llamada función objetivo, y las restricciones se expresan a través de relaciones entre las variables involucradas en el problema (que en nuestro caso, será una relación entre dos variables, de la forma $g(x,y)=0$). Por lo tanto, para nosotros, un problema de optimización, matemáticamente, se presenta bajo la forma:

Optimizar	$f(x,y)$
Sujeto a:	$g(x,y)=0$

A modo de ejemplo, modelaremos matemáticamente, un problema de optimización:

Problema 1: Con una cerca de 10 metros, cercar un terreno rectangular de área máxima.

Paso 1:	**Hacer un dibujo de la situación planteada.**  Cerca de 10 metros  Terreno rectangular a cercar
Paso 2:	**Asignar variables:** 
Paso 3:	**Buscar una relación entre las variables:** Usando la condición del largo de la cerca disponible (10 metros) se obtiene: $x + y = 5$
Paso 4:	**Determinar la función a optimizar (maximizar, en este caso):** Como se desea maximizar el área del terreno cercado: $A = x\,y$ y, como $y = 5 - x$, se tiene que: $A = A(x) = x\,(5 - x)$

Por lo tanto, el problema quedaría inicialmente, modelado matemáticamente, así:

Maximizar	$A = x\,y$
Sujeto a:	$x + y = 5$

y finalmente, modelado equivalentemente, de la siguiente manera:

Maximizar	$\boldsymbol{A = A(x) = x(5 - x)}$
Sujeto a:	$\boldsymbol{0 < x < 5}$

Actividad 1:

a) Resolver, de más de una manera, el problema de optimización anterior, es decir

Maximizar	$A = A(x) = x(5 - x)$
Sujeto a:	$0 < x < 5$

b) De las diferentes soluciones, con los cuales se ha resuelto el problema anterior, se pide identificar:

- Clasificación general del método usado (numérico, algebraico o geométrico)
- Ambiente matemático (temática matemática usada)
- Pre-requisitos específicos de contenidos empleados
- Nivel (curso) y contenido, en el cual se podría trabajar, con sus estudiantes, este problema con este método de solución.

Solución 1:

- **Método:**
- **Ambiente matemático:**
- **Pre-requisitos:**
- **Nivel y contenido**

Solución 2:

- **Método:**
- **Ambiente matemático:**
- **Pre-requisitos:**
- **Nivel y contenido**

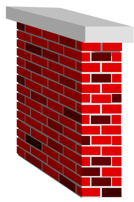
Solución 3:

- **Método:**
- **Ambiente matemático:**
- **Pre-requisitos:**
- **Nivel y contenido**

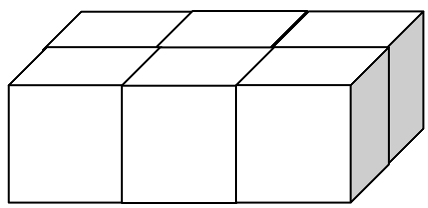
Solución 4:

- **Método:**
- **Ambiente matemático:**
- **Pre-requisitos:**
- **Nivel y contenido**

Actividad 2:



Resolver, siguiendo los pasos sugeridos en el ejemplo 1, el siguiente problema de optimización:
Con un muro de hormigón de 600 metros de largo se van a construir 6 salas de clases (ver figura). Calcular las dimensiones de cada sala, de modo que el área que ocupan las 6 salas sea máxima.

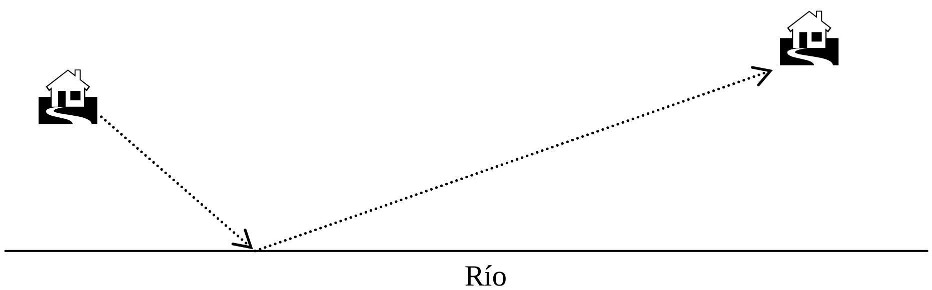
Paso 1:	**Hacer un dibujo de la situación planteada y asignar variables.** 
Paso 3:	**Buscar una relación entre las variables:**
Paso 4:	**Determinar la función a optimizar (maximizar, en este caso):**
Paso 5:	**Resolver el problema:**

Paso 6:	**Dar la respuesta:**

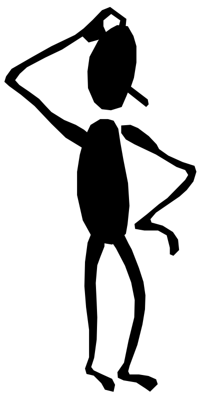
Actividad 3:

Un campesino vive a 2km de un río y debe ir a caballo a un lugar que se encuentra a 3km del mismo lado del río y a 10 km de distancia horizontal de su casa. Debido a la distancia a recorrer, el campesino decide pasar al río para darle de beber a su caballo. En las proximidades por las cuales viajará el campesino, el río es aproximadamente lineal. Ubicar el punto del río, donde el campesino debe pasar a dar de beber a su caballo, de modo la distancia total recorrida en el viaje, sea mínima.

Solución:



Actividad 4:



Una empresa fabrica un cierto producto que puede vender a $120000 el ciento. Un análisis de los costos de producción permite distinguir dos tipos de gastos:

- Los cargos fijos, provenientes de los gastos en mano de obra, desgaste de máquinas y arrendamiento de local, se elevan a $100000.
- Los cargos correspondientes a las cantidades producidas, ascienden a $C(x)=5000x^2+40000x$, donde x representa la cantidad de cientos de unidades producidas.

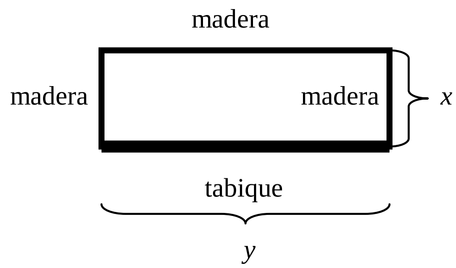
Determinar la cantidad de unidades que se deben fabricar, con el fin de maximizar las utilidades de la empresa.

Solución:

Problemas adicionales:

1. Una persona desea construir un jardín rectangular, utilizando un lado de su casa como lado del jardín, y colocando una cerca de alambre a los tres lados restantes. Determinar las dimensiones del jardín más grande que puede rodear utilizando 40 metros de malla de alambre.
   Solución: El jardín debe tener 20 metros de largo (lado paralelo al lado utilizado de la casa) por 10 metros de ancho.

2. El gerente de una tienda de departamentos quiere construir en el estacionamiento de la tienda, un anexo rectangular que tenga un área de $600 m^2$ para poder exhibir cierto equipo. Las paredes de tres lados del anexo se construirán con en madera que tiene un costo de \$7000 el metro lineal. La cuarta pared se construirá con tabiques que tienen un costo de \$14000 el metro lineal. Encontrar las dimensiones del anexo de manera que minimicen el costo total de los materiales de construcción.
   Solución:



   x = 20 metros, y=30 metros

3. Encontrar dos números positivos, cuya suma sea 100 y cuyo producto sea lo más grande posible.
   Solución: 50 y 50.

4. Una plantación de naranjas produce una ganancia de \$40000 por árbol cuando tiene 1000 árboles plantados. Debido a la sobreproducción, la ganancia por árbol (por cada árbol en la plantación) se reduce en \$20 por cada árbol adicional que se plante. ¿Cuántos árboles se deben plantar de manera que se tenga la ganancia total máxima en la plantación?.
   Solución: Como se pide el "*número de árboles"* óptimo, sea x el número de árboles que deben plantarse. La otra variable del problema es la "*ganancia por árbol"*. Sea g la ganancia por árbol. El objetivo es maximizar la ganancia total, la que denotaremos por T. Entonces:

ganancia total = (ganancia por árbol) · (número de árboles) $T \quad = \quad g \quad \cdot \quad x$

Como la ganancia por árbol g depende del número árboles plantados x, la ecuación que relaciona las variables en este problema, se puede deducir expresando g en función de x:

(ganancia por árbol) = (ganancia original por árbol) – (pérdida en la ganancia debido al incremento) $g = 40000 - (x - 1000) \cdot 20$ $g = 60000 - 20x$

Por lo tanto,

$T = g \cdot x = (60000 - 20x) \cdot x = 60000x - 20x^2$

Maximizando la función T, se obtiene que para maximizar la ganancia se deben plantar 1500 árboles.